

MATEMATICA

**CLASELE
V-VIII**

Constantin COANDĂ

Gheorghe DUȚĂ

Gheorghe DRĂGAN

Ionuț IVĂNESCU

Florentin SMARANDACHE

Lucian TUȚESCU

Jean ILIE

coordonator: insp. general prof. Sami DRĂGHICI

SUBIECTE POSIBILE

**PENTRU
EXAMENUL DE ADMITERE
ÎN LICEU ȘI
EXAMENUL DE CAPACITATE**

Admiterea în liceu - anii 1991-1997

OLT



Constantin Coandă, Gheorghe Duță, Gheorghe Drăgan
Jean Ilie, Ionuț Ivănescu, Florentin Smarandache, Lucian Tuțescu
coordonator

insp. general prof. Sami Drăghici

SUBIECTE POSIBILE PENTRU
EXAMENUL DE ADMITERE ÎN LICEU ȘI
EXAMENUL DE CAPACITATE
Admiterea în liceu anii - 1991 - 1997
Clasele V-VIII

La elaborarea acestei lucrări au colaborat:

- prof. Daniela TACLIT – inspector matematică (Olt)
prof. Dumitru COTOI (Craiova)
prof. Elena ROȘU (Ișalnița)
prof. Elena SAVIN (Craiova)
prof. Elena TĂBÎRȚĂ (Balș)
prof. Florin NICOLAESCU (Balș)
prof. George CHIRIȚOIU (Balș)
prof. Ionela POPA (Balș)
prof. Marian FIRICEL (Calafat)
prof. Mariana și Florin BENEĂ (Craiova)
prof. Mariana PĂTRAȘCU (Craiova)
prof. Valerica POMETESCU (Craiova)
prof. Valeriu VĂDUVA (Craiova)
prof. Sanda ZANFIR (Craiova)

Editor: Călin Vlasie

Culegere și paginare computerizată: Bogdan Bîtea

Tehnoredactare: Cristina Mihart

Revizie: Ana Cârstoveanu

Coperta: Viorel Mihart

Apărut: 1998

**Tiparul executat la tipografia
Editurii PARALELA 45**

© Copyright Editura PARALELA 45
0300, Pitești, str. Frații Golești, 29
tel / fax: 048 / 64.58.46

I.S.B.N.: 973 - 9291 - 42 - 2

**Constantin Coandă
Gheorghe Duță
Gheorghe Drăgan**

**Ionuț Ivănescu
Florentin Smarandache
Lucian Tuțescu**

Jean Ilie

coordonator: insp. general prof. Sami DRĂGHICI

SUBIECTE POSIBILE

PENTRU

EXAMENUL DE ADMITERE ÎN LICEU

ȘI EXAMENUL DE CAPACITATE

Admiterea în liceu – anii 1991-1997

Clasele V-VIII



Cuvânt înainte

Prezenta lucrare încearcă să pună la dispoziția elevilor și profesorilor instrumente de evaluare a cunoștințelor la toate capitolele din actuala programă de matematică.

În evoluția adolescenților din țara noastră etapa admiterii în liceu mobilizează eforturi și emoții cu totul speciale. Actuala lucrare se dorește a fi un sfătuitoar permanent în perioada fierbinte dintre examenul de capacitate și admiterea în liceu. Testele cuprinse în această culegere au un caracter complementar față de multe materiale scrise în vederea sprijinirii celor ce se pregătesc pentru astfel de examene și se referă la întreaga materie cuprinsă în programele analitice de aritmetică, algebră și geometrie din clasele gimnaziale. Aceste teste au fost realizate cu intenția de a-i ajuta corespunzător pe cei ce vor să utilizeze lucrarea asigurându-li-se acestora succesul cât și plusul de pregătire pentru viitoarele examene.

Pentru toate variantele de subiecte propuse prezentăm baremuri de corectare, soluții, sugestii de rezolvare și răspunsuri complete în funcție de dificultatea și caracterul specific al problemei.

Menționăm totodată că fiecare test este alcătuit după modelele subiectelor date în ultimii ani la examenul de admitere în liceu și sunt astfel grupate încât să acopere programa de examen și să asigure o parcurgere ritmică a manualelor școlare. De aceea, în finalul lucrării am prezentat subiectele date la proba de matematică în anii 1991-1997.

Mulțumim tuturor celor care au dovedit o receptivitate deosebită pentru apariția lucrării și au făcut posibilă tipărirea ei.

Autorii

ENUNȚURI

TEST NR. 1

- I. 1. Să se determine numerele naturale a, b, c știind că:

$$8 \cdot (2^a + \overline{bb}_{(10)}) + 4^c = 609$$

2. Să se afle numerele naturale a, b, c, d cu proprietățile:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{3}{5}; \frac{c}{d} = \frac{5}{7}; \text{ și } abcd = 17010.$$

3. Să se determine mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{17 - \sqrt{n}} \in \mathbb{N} \right\}$.

- II. 1. Fie $a = \sqrt{45} - 2\sqrt{2^2 - 1^2}$ și $b = 3\sqrt{25^{n+1} : 5^{2n+1}} + \sqrt{12}$, $n \in \mathbb{N}$.

Să se afle cea mai mică valoare a lui p , număr natural pentru care $(b - a - \sqrt{12})^p \in \mathbb{N}$.

2. Să se arate că $\overline{ab} \neq 6$ unde $\sqrt{62 + 20\sqrt{6}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{\sqrt{3}+1}x + \frac{b}{\sqrt{3}-1}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, al cărei grafic conține punctul $M(\sqrt{3}-1; 3)$. Determinați punctul cu ambele coordonate numere întregi care aparține graficului funcției.

- III.1. Să se rezolve inecuația:
$$\frac{(x^2 - 6\sqrt{3}x + 27)(x-4)(x^2 - 10x + 25)}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1}} \leq 0.$$

2. Triunghiul ABC are $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm și $m(\angle ACB) = 30^\circ$. Proiecția acestui triunghi pe un plan α este un triunghi $A'B'C'$ cu $m(\angle B'A'C') = 90^\circ$ și aria de 3 cm². Să se calculeze:

- Aria triunghiului ABC.
- Laturile triunghiului $A'B'C'$.
- Unghiul diedru dintre planele (ABC) și α .

3. Fie triunghiul ABC și G centrul său de greutate. O dreaptă oarecare dusă prin G intersectează pe AB în M și pe AC în N. Fie $BE \parallel AI \parallel CF$ astfel ca punctele C, G, E să fie coliniare, B, G, F coliniare, și BE, AI, CF

sunt situate în același semiplan cu A determinat de BC, I fiind mijlocul lui BC. Să se arate că:

a) $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$

b) $BE + CF \geq 4 \cdot GI$; când are loc egalitatea ?

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 2p 3) 1p

III. 1) 2p 2) 2p 3) 1p

TEST NR. 2

I. 1. Calculați: $(2,5 \cdot 10^3 + 32 : 10^{-2}) \cdot 10 + \sqrt{(-2)^2}$

2. Arătați că: $\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$.

II. 1. Să se determine mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. În triunghiul ABC se duce înălțimea AD ($D \in BC$). Să se calculeze BD în funcție de laturile triunghiului $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$.

III.1. Baza unui paralelipiped drept este un romb cu latura de lungime 8 și un unghi de măsură 60° . Aria laterală a paralelipipedului este de 512. Să se afle volumul paralelipipedului.

2. Să se afle la ce distanță de vârful unui con cu raza bazei de 4 și înălțimea 5 trebuie să ducem un plan paralel cu baza pentru ca acest con să fie împărțit în două părți de același volum.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p

II. 1) 1p 2) 2p

III. 1) 2p 2) 2p

TEST NR. 3

I. 1. a) Calculați: $[2^{-2} + (-1)^5 + 1,25] : \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}}$

b) Împărțiți numărul 6 în părți direct proporționale cu numerele 0,(3) și 0,1(6).

2. Rezolvați în \mathbf{R} sistemul:
$$\begin{cases} 31x + 23y = 54 \\ 62x - y = 61 \end{cases}$$

II. 1. Efectuați:
$$\frac{4x^2}{x^4 + x^3 + x + 1} : \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2}{x + 1} \cdot \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right)$$

scriind rezultatul sub formă de fracție ireductibilă.

2. Prin împărțirea unui polinom $P(X)$ la $X^3 + 3$ se obține un rest egal cu pătratul câtului. Aflați acest rest știind că: $P(-1) + P(1) + 5 = 0$.

III.1. Piramida patrulateră regulată VABCD are latura bazei $AB = 10$ cm și înălțimea $VO = 5$ cm.

- Calculați aria laterală și volumul piramidei
- Aflați măsura în grade a unghiului planelor (VBC) și (ABC)
- Admițând că pe VO există un punct P egal depărtat de cele 5 vârfuri ale piramidei determinați PV.

2. Într-un cilindru circular drept cu raza $\sqrt{2}$ și înălțimea 4 cm, [AB] diametru iar [AA'] și [BB'] sunt generatoare:

- Aflați aria totală și volumul cilindrului
- Fie E pe cercul de diametru [AB] astfel încât $m(\widehat{BE}) = 60^\circ$. Precizați măsura în grade a unghiului format de dreptele AE și A'B.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,5p b) 0,5p

2) 1p

II. 1) 1p

2) 1p

III. 1) a) 1p b) 1p c) 1p

2) a) 1p b) 1p

TEST NR. 4

I. 1. Să se efectueze:

a) $\left[0,25 - 4\left(3 - \frac{5}{2}\right)\right] : (-1,4)$

b) $(\sqrt{0,25} - \sqrt{1,96}) : \left(2\frac{1}{3} - 3\frac{3}{5}\right)$

c) $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 5\sqrt{6}$

2. Se dau mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{n-1} \in \mathbb{N}\right\}$ și $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{8}{n+2} \in \mathbb{N}\right\}$.

Să se calculeze $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

II. 1. Rezolvați ecuația: $m(x+1) - m^2x = 1$. Discuție.

2. Să se arate că dacă $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \neq 0$ astfel încât $ax + by = c$

atunci: $x^2 + y^2 \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2}$.

III.1. Aflați aria unui dreptunghi știind că dacă se micșorează lungimea sa cu 10% iar înălțimea se mărește cu 10% aria se micșorează cu 20 cm^2 .

2. Se dă triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\angle B) = 90^\circ$, $AB = AC = a$. În punctul O, mijlocul segmentului AC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se ia un punct D astfel încât $DO = b$. Fie $AM \perp BD$, $M \in (BD)$.

a) Să se arate că $CM \perp DB$

b) Să se calculeze aria triunghiului AMC.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,5p b) 0,5p c) 0,5p

2) 1p

II. 1) 1,5p

2) 1p

III. 1) 2p

2) a) 1p b) 1p

TEST NR. 5

- I. 1. Calculați partea întreagă a numărului a unde:

$$a = [2,5 - 0,4 \cdot 3, (3)]^{-1} - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{7}{2^3}\right)^{-1}$$

2. Fie p un număr natural de două cifre, prim, care are cifrele egale. Determinați mulțimea A:

$$A = \{n | n \in \mathbf{N}^*, n \mid \overline{bb}, p + \overline{bb} = 77\}$$

3. Numerele naturale nenule a, b, c cu $0 < a < b < c$ sunt direct proporționale cu 4, 5, d, $d \in \mathbf{N}^*$. Dacă $c^2 \leq (2b - a)^2$, cât la sută reprezintă b din (a + c) ?

- II. 1. Calculați: $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^{1998(a+b)}$ unde a, b $\in \mathbf{Q}$ astfel ca

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{\sqrt{3}-1} \in \mathbf{Q}.$$

2. Determinați A, știind că: $A = \{a \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\} \mid (a, a^2) \cap \mathbf{N} = \{2, 3\}\}$

3. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere prime, $c \in \mathbf{Z}$ astfel ca: $7\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = c\sqrt{3}$.

- III.1. Trapezul ABCD are $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm, $AB \subset \alpha$ și $C \notin \alpha$, $D \in \alpha$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $MN \parallel AB$, $O \in MN$, $M \in AD$, $N \in CB$. Dacă T și R aparțin planului α astfel ca $MT \parallel NR$, să se calculeze lungimea lui TR.

2. Pe planul triunghiului ABC, cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 15^\circ$, $BC = 16$ cm, se ridică perpendiculara $AV = 4$ cm. Să se calculeze:

- distanța de la punctul A la planul (VBC)
- măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și (VBC)

TEST NR. 6

- I. 1. Să se determine mulțimea: $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1}, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. Calculați: $(2,5 \cdot 10^3 + 32 : 10^{-2}) : 10^{-1} + \sqrt{(-2)^2}$.

3. Descompuneți în factori:

- a) $(x-1)^2 - y^2$
- b) $9x^2 + 6x + 1$

II. 1. Reprezentați grafic funcția: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \min\{2x-1; 2x+1\}$.

2. Aflați aria unui triunghi echilateral cunoscând suma distanțelor de la un punct M ce aparține interiorului triunghiului, la laturile lui, în funcție de lungimea laturii triunghiului.

3. Se dă un cub de latură 20. Să se afle distanța dintre o diagonală a cubului și o muchie laterală pe care nu o intersectează.

III. Baza unei piramide este triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = AC = 8$ cm și muchia (SA) perpendiculară pe bază, $SA = 6$ cm. Să se calculeze:

- a) Aria totală a piramidei
- b) Măsura unghiului diedru format de fețele (SBC) și [ABC]
- c) Volumul piramidei [SABC]

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. a) 1p b) 1p c) 1p

TEST NR. 7

I. 1. Să se calculeze: $(1, (3) + 1, (6)) \cdot 0, (3) + \sqrt{6,25} : \frac{5}{2}$.

2. Explicitați: $\|x-1\| + 2\| - 3\|$.

II. 1. Fie ABC un triunghi isoscel ($[AB] \equiv [AC]$) iar AD bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Fie $DF \perp AB$, $F \in (AB)$ și $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Să se arate că BFEC este un trapez isoscel.

2. Să se determine mulțimea: $\left\{ x \in \mathbf{N} \mid n \in \mathbf{N}, x = \frac{2n+7}{n+1} \right\}$

III.1. Triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) se rotește în jurul catetei AC. Știind că $AB = 4$, $AC = 3$, să se calculeze aria și volumul corpului obținut.

2. Fie ABCD un pătrat de latură 3 cm. În A și B se ridică perpendicularele $AA' = 4$ cm și $BB' = 6$ cm pe planul ABCD. Dacă $E \in A'B'$ astfel încât

$(A'E) \equiv (EB')$ și $F \in AB$ astfel încât $(AF) \equiv (FD)$, să se calculeze volumul piramidei EABCD.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 2p 2) 1p
 II. 1) 1,5p 2) 1,5p
 III. 1) 1,5p 2) 1,5p

TEST NR. 3

I. 1. Calculați: $3 - 5^{-2} \cdot 75 + 10^0 + \sqrt{0,64}$

2. Enumerați elementele mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 + \sqrt{2} < x \leq 1 + \sqrt{25}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{3}\}$.

3. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului:

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X + 1 \text{ la } X - 1$$

II. 1. Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic, suma diametrelor cercurilor înscris și circumscris acelui triunghi este egală cu suma catetelor.

2. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \\ x + y + z = 60 \end{cases}$$

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x, y) = \frac{2x + y}{x + y} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{x - 2y}{x - y}$$

III. În tetraedrul regulat [OABC] unde $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ se dă: $OA = OB = OC = 8 \text{ cm}$.

- a) Calculați aria triunghiului ABC
 b) Calculați aria totală a tetraedrului [OABC]
 c) Calculați volumul tetraedrului [OABC]

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 III. a) 1p b) 1p c) 1p

TEST NR. 9

I. 1. Găsiți elementele mulțimilor X și Y știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- a) $X \cap Y = \{3, 4\}$
- b) $X \cup Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- c) Suma elementelor mulțimii Y este număr par
- 2. a) Să se arate că $E(X) = X^4 - 4X^3 + 12X - 9$ este divizibilă cu $X - 1$ și $X - 3$
- b) Să se descompună în factori ireductibili $E(X)$
- 3. Rezolvați ecuația: $|2x - 3| + |4x - 6| \neq 0$

II. 1. Fie ABC un triunghi și D mijlocul lui (BC) . Arătați că $AD < \frac{AB+AC}{2}$.

2. Să se rezolve inecuația: $\frac{4-x}{x^2+4x+5} < 0$.

3. Aflați numerele reale x și y care verifică relația: $x^2+y^2+2x+2y+2=0$.

III. Un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are dimensiunile

$AB = 4$ cm, $AA' = 4\sqrt{3}$ cm și $BC = \sqrt{33}$ cm. Calculați:

- a) măsura diagonalei paralelipipedului
- b) măsura unghiului dintre planele $(B'C'D)$ și (BAC)
- c) volumul paralelipipedului
- d) aria totală a paralelipipedului

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. a) 0,75p b) 0,75p c) 0,75p d) 0,75p

TEST NR. 10

I. 1. Comparați numerele $\frac{777\dots75}{777\dots78}$ și $\frac{888\dots85}{888\dots89}$, dacă fiecare număr de la numărător și numitor are n cifre, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

2. Calculați: $1 - \frac{1}{2} \cdot (0,1 \cdot 10^2 - \sqrt{81}) : 2^{-1}$

3. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

4. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că numărul $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ este irațional.

II. 1. Să se rezolve ecuația: $\frac{xy}{yx} = 2 - \frac{y}{x}$

2. Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, arătați că: $|x + y + z| \leq \sqrt{3}$

3. O paralelă la mediana (AD) a triunghiului ABC taie AB și AC respectiv în E și F. Să arate că $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

III. Să dă un con circular drept în care lungimea diametrului bazei este de 12 cm și lungimea înălțimii este egală cu $\frac{2}{3}$ din lungimea diametrului.

- Să se determine volumul conului
- Aria laterală a conului
- Se desfășoară suprafața laterală a conului, obținându-se un sector de cerc. Care este măsura unghiului acestui sector de cerc?

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 0,75p 3) 0,75p 4) 0,75p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. a) 1p b) 1p c) 1p

TEST NR. 11

I. 1. Să se calculeze:

a) $\left(0,001: \frac{1}{20} + \sqrt{0,0064}\right) \cdot (3^2 + 1^0)$

b) $(1 + a)^2 - (1 - a)^2$

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de $f(x) = 2x + m$.

- Să se determine valoarea parametrului "m" astfel încât graficul să treacă prin punctul A(2; 5)
- Să se reprezinte grafic funcția determinată

3. Rezolvați ecuația: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{1 - 2x + x^2} = 2, x \in \mathbb{R}.$

II. 1. Dacă $p > 3$ este un număr prim, arătați că p^2 prin împărțire la 24 dă restul 1.

2. Dacă $P(X) = 3X^2 - 3aX + a^2$, arătați că $P(b) \geq 0$, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.
3. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez. Să se arate că dreapta determinată de punctul O și de punctul de intersecție a laturilor neparalele ale trapezului trece prin mijloacele bazelor trapezului.
- III. Într-un cilindru a cărui secțiune axială este un pătrat cu latura de 6 cm se înscrie o sferă. Să se calculeze:
- Aria totală și volumul cilindrului
 - Raportul dintre volumul sferei și al cilindrului

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p

2) a) 0,50p b) 0,50p 3) 1p

II. 1) 2p 2) 1p 3) 1p

III. a) 1p b) 1p

TEST NR. 12

- I. 1. Să se arate că pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ expresia $E = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibilă cu 7.
2. Determinați cifrele \underline{a} și \underline{b} , astfel încât fracția $\frac{52a}{1b75}$ să se simplifice cu 17.
3. Calculați: $[(-1)^n \cdot (-2^2)^n - 4^n] : (-4^n)$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- II. 1. Efectuați: $\min(-5; -2) + \frac{|-7|}{|-2|} - \sqrt{(-4)^2}$
2. Justificați de ce ecuația: $\sqrt{3}(\sqrt{2} - x)^2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ nu are soluții reale.
3. Simplificați fracția: $\frac{4+8+12+\dots+400}{3+6+9+\dots+300}$.
- III.1. Măsura unui unghi este $\frac{7}{8}$ din suplementul său. Să se arate că $\frac{2}{3}$ din măsura unghiului cel mare este cu 1° mai mare decât $\frac{3}{4}$ din măsura unghiului mic.
2. Se dau trei plane paralele α , β și γ și punctele A, B în α , iar C, D în β . Dreptele AC, BC, BD și AD taie planul γ în E, F, G și H. Să se arate că EFGH este paralelogram.
3. Pe planul paralelogramului ABCD se ridică perpendiculara AE. Să se calculeze distanțele de la E la dreptele BD, BC și CD, știind că: $AB = AD = AE = a$ și $m(\angle BAD) = 60^\circ$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 13

I. 1. Găsiți numărul natural n astfel încât $A = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + 9^n$ să fie divizibil cu 5.

2. Să se arate că: $\frac{2^n \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+2}}{30^{n+1}} = 2 \frac{1}{2}, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

3. Știind că $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ să se afle valoarea raportului $\frac{5y - 7x}{6y - 8x}$.

II. 1. Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $|2x + 5 - |x - 2|| = 0$.

2. Să se arate că numărul $n = 1991 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 1990)$ este pătrat perfect.

3. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \max[-3, 1]; -\sqrt{17}; -1-3 \} \cdot x - \{2, 3\} \cdot y = 1, 1(6) - \sqrt{576} \\ \min[2^{-3}; \sqrt{6}; 1] \cdot x + 3^{-2} y = -72^{-1} \end{cases}$$

III.1. Două unghiuri adiacente au bisectoarele perpendiculare între ele. Să se afle măsura fiecărui unghi, știind că măsura unuia dintre ele este de cinci ori mai mare decât măsura celuilalt unghi.

2. Să se arate că dacă diagonalele unui trapez dreptunghic sunt perpendiculare între ele, atunci lungimea laturii perpendiculare pe baze este media geometrică a lungimilor bazelor.

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm E și F proiecțiile punctului A pe bisectoarele $\angle ABD$, respectiv $\angle ACD$. Să se arate că $EF \parallel (BCD)$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 1p 3) 1,25p

II. 1) 1p 2) 0,75p 3) 1,25p

III. 1) 0,75p 2) 1p 3) 1,25p

TEST NR. 14

I. 1. Determinați cifrele consecutive a, b, c, d în baza 10 știind că $\overline{ab} = cd$.

2. Se dă $A = \sqrt{\frac{2x+5}{x-1}}$, aflați $x \in \mathbf{Z}$ știind că $A \in \mathbf{N}$.

3. Arătați că fracția $F = \frac{10n+53}{7n+37}$ este ireductibilă.

II. 1. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \min \left(x+1; 4 - \frac{x}{2} \right) \geq 1 \right\}$

2. Reprezentați grafic funcția: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{3^2 + 3^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot x - 4$.

3. Să se determine x din proporția: $\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}$ unde $a = 2^{1990} - 2^{1989} - 2^{1988}$.

III.1. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ are loc inegalitatea $\sin B \cdot \sin C \leq \sin 30^\circ$. Când are loc egalitatea?

2. Fie A, B, C, D – patru puncte necoplanare astfel încât:

$$BC^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 \text{ și } AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2.$$

Să se arate că dacă M și N sunt respectiv mijloacele segmentelor AB și CD, atunci MN este perpendiculară comună a dreptelor AB și CD.

3. Teorema celor trei perpendiculare: enunț și demonstrație.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,25p 3) 0,75p

II. 1) 1,25p 2) 0,75p 3) 1p

III. 1) 1,25p 2) 1,25p 3) 0,50p

TEST NR. 15

I. 1. Fie numerele:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1992}{1993} \text{ și } b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1993}$$

Demonstrați că $3 \mid (a+b)$.

2. Aflați forma numărului natural n știind că:

$$(-2)^5 + (-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1)^{n+1} = -31\frac{1}{4}$$

3. Arătați că numărul $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ este subunitar ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

II. 1. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $a = (n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4$ este un pătrat perfect?

2. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) + 2f(1-x) = |x+1|$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $f(x)$ – funcție liniară.

3. Fie $P(X) = X^{1993} + 1993X^{1992} + 1993X^{1991} + \dots + 1993X + 1993$. Arătați că $P(-1992) = 1$.

III. 1. În $\triangle ABC$ se consideră $m(\angle A) = 60^\circ$ și $AB = 2 \cdot AC$. Să se afle măsurile $\angle B$ și $\angle C$.

2. Să se demonstreze că în orice $\triangle ABC$ are loc relația: $\frac{h_A}{a} = \frac{h_B}{b} = \frac{h_C}{c}$,

unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor $\triangle ABC$, iar h_A, h_B, h_C înălțimile corespunzătoare vârfurilor A, B , respectiv C .

3. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei egală cu $6\sqrt{3}$ m și apotema piramidei egală cu 5m. Aflați aria laterală și volumul piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 1p 3) 1,25p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1,25p 2) 0,75p 3) 1p

TEST NR. 16

I. 1. Știind că $a + b = 3$ și $a + c = 5$ să se calculeze $a^2 + ac + 5b$.

2. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ să se afle raportul: $\frac{xy - y^2}{xy + y^2}$

3. Fie expresia $E(x) = x^2 + x + p$, unde p este un număr întreg. Să se arate că dacă $E(2)$ sau $E(3)$ sunt divizibile cu 6, atunci $E(5)$ este divizibil cu 6.

- II. 1. Să se scrie ca reuniune de intervale mulțimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, |x - 1| > 2\}$.
 2. Rezolvați ecuația: $(x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 100) = 15050$.
 3. Pentru ce valori ale lui m și n ecuațiile: $x^2 + mx + 1 = 0$ și $2x^2 - nx + m = 0$ sunt echivalente ?
- III.1. Într-un triunghi ABC se cunoaște: $m(\angle A) = 50^\circ$, $m(\angle C) = 64^\circ$. Să se calculeze unghiul ascuțit pe care-l face bisectoarea unghiului B cu înălțimea care pleacă din A.
 2. În cubul ABCDA'B'C'D' fie Q proiecția vârfului D pe diagonala AC'.
 Să se determine valoarea raportului $\frac{AQ}{AC'}$.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1p 2) 1,5p 3) 1,5p
 III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 17

- I. 1. Să se arate că $\frac{2 \cdot (-1)^k + 2 \cdot (-1)^{k+1} + np}{(n+p)\sqrt{np}} < \frac{1}{2}$, $(\forall) k \in \mathbf{N}$, $n, p > 0$, $n \neq p$.
 2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{13}{12}$, arătați că $\frac{3a-b}{4a+b}$ este un cub perfect.
 3. Folosind $E = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3a-2} - \frac{1}{3a+1} \right)$ arătați că $S < 1/3$ unde:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
- II. 1. Rezolvați în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ecuația: $8x^2 - 6xy + y^2 - 5 = 0$
 2. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$. Ordonăți crescător numerele $f(-3)$, $f(1)$, $f(-\sqrt{5})$, $f(1 + \sqrt{5})$.
 3. Fie polinomul:

$$P(X) = a(1-b)(2X^2 - 3)^{2k+1} - b(5 - 6X^2)^{k-1} - a(4 - 5X^3)^{k+2} + 1,$$

 $k \in \mathbf{N}$ și $a, b \in \mathbf{Z}_+$. Determinați a și b astfel încât suma coeficienților să fie 0.

- III.1. Să se arate că dacă într-un $\triangle ABC$, latura $[AC]$, bisectoarea $\sphericalangle B$ și mediatoarea laturii $[BC]$ sunt concurente atunci $m(\sphericalangle B) = 2m(\sphericalangle C)$.
2. În $\triangle ABC$ se cunosc $AB = 9$ cm, $BC = 10$ cm și $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$. Calculați lungimea segmentului AB .
3. O sferă, un cilindru circular drept cu secțiunea axială un pătrat și un cub au aceeași arie. Să se compare volumele lor.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 0,75p 3) 1,25p
 II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 III. 1) 0,75p 2) 1,25p 3) 1p

TEST NR. 13

I. 1. Să se determine a , astfel încât: $|a\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - \sqrt{5}$.

2. Arătați că numerele $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ și $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ sunt mai mici ca 2.

3. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,7 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 0,5 \end{cases}$$

II. 1. Să se afle x știind că $\frac{x}{3} = \frac{32a}{15}$ și $4 \mid 32a$.

2. Fie x, y, z numere reale. Să se arate că:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

b) dacă $x + y + z = 1$ deduceți că $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/3$

III.1. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a\sqrt{3}$. Notăm cu P piciorul înălțimii din A pe BC și M, N proiecțiile lui P pe laturile AB , respectiv AC . Calculați lungimea segmentului MN în funcție de a .

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel. Ipotezuza BC se află într-un plan α și planul triunghiului face cu planul α un unghi de 45° . Să se afle unghiurile pe care le formează catetele AB și AC cu planul α .

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
II. 1) 1p 2) a) 1p b) 1,5p
III. 1) 1,5p 2) 1p

TEST NR. 19

- I. 1. Fie $S = (-1)^{a_0} + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \dots + (-1)^{a_{100}}$. Știind că a_0, a_1, \dots, a_{100} sunt numere naturale calculați $S_{\min} + S_{\max}$. Arătați că în general $S \neq 0$.
2. Determinați numerele naturale x și y astfel încât media geometrică a numerelor 4^x și 8^y să fie 64.
3. Demonstrați că numerele $\overline{a4} \cdot \overline{a6} + 1$ sunt pătrate perfecte oricare ar fi cifra a .
- II. 1. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } |3x - 2| \leq 7\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } x - 5 \in [-1, 2]\}$. Calculați $A \cap B$.
2. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul:
$$\begin{cases} x + 2^n y = 4^n \\ 2x - y = 2^{2n+1} \end{cases} \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$
3. Se dă $P(X) = 2X^2 - mX + n$, $P(X) : (X-1)$ și $P(X) : (X+1)$ dă restul 2. Aflați m și n .
- III.1. În $\triangle ABC$ cu $m(\angle C) = 60^\circ$, bisectoarele (AK) și (BE) unde $K \in BC$, $E \in AC$ se intersectează în O . Arătați că $OK = OE$.
2. Fie pătratul $ABCD$ și M un punct în interiorul $\triangle ABC$. Arătați că $MD > MB$.
3. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 16 cm și înălțimea de 6 cm. Calculați aria laterală și muchia laterală a piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
III. 1) 1,25p 2) 1,25p 3) 0,50p

TEST NR. 20

- I. 1. Se dau mulțimile: $A = \{2^n, 4, 7\}$ și $B = \{12, 16, 125\}$. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $A \cup B$ să aibă cinci elemente.
2. Știind că $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, să se calculeze $\frac{2x-y}{3y-x}$.
- II. 1. Calculați: $\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.
2. În triunghiul ABC cunoaștem: $AB = 6$ cm, $AC = 14$ cm și $m(\angle B) = 60^\circ$. Să se calculeze BC și lungimile înălțimilor triunghiului.
- III.1. Să se rezolve ecuațiile:
- a) $x^2 + x - y^2 + y = 2$; $x, y \in \mathbf{N}$;
- b) $2x - (4x - 5) = 3x + 1$; $x \in \mathbf{R}$.
2. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) se cunosc $AB = 12$ cm și lungimea medianei $AM = 10$ cm ($M \in BC$). În punctul M se ridică o perpendiculară MN pe planul triunghiului. Dacă $MN = 8$ cm, să se calculeze:
- a) unghiul dintre planele, (NAB) și (ABC);
- b) $\cos \angle [(NBC), (AMN)]$;
- c) distanța de la punctul A la dreapta NB;
- d) aria și volumul piramidei NABC.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 0,50p

II. 1) 0,50p 2) 2p ($4 \cdot 0,50p$)

III. 1) 1p+0,50p 2) 0,75p+1p+1p+1,25p

TEST NR. 21

- I. 1. Efectuați:
- a) $2 + 2 \cdot \{2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 - 2:2)]\} \cdot 2^{-2}$
- b) $\left(1 + \frac{4}{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{3}{4}\right)^2$
- c) $(2 - \sqrt{3})^2 - (8 - 4\sqrt{3})$

2. a) Calculați valoarea raportului $\frac{3a+b}{3a-b}$ știind că $\frac{2a}{3b} = \frac{1}{5}$.

b) După două creșteri consecutive, prețul unui obiect a ajuns de la 3500 lei la 3969 lei. Știind că creșterea a fost de 5%, să se afle cât la sută reprezintă prima creștere de preț.

II. 1. Să se rezolve în \mathbb{Q} ecuația: $5\left(y + \frac{2}{3}\right) - 3 = 4\left(3y - \frac{1}{2}\right)$

2. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația: $\frac{7x+1}{8} - \frac{5x-11}{11} < 4$

3. Un automobil a parcurs 150 km în 3 ore. Prin localități, viteza medie a fost de 40 km/h, iar în afară 70 km/h. Cât timp a mers prin localități?

4. Determinați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 + mX^2 + 1$ cu $X-1$, dacă la împărțirea polinomului $P(X)$ cu $X+2$ se obține restul -3 .

5. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

III.1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, O mijlocul lui [BC], $AD \perp BC$, $BC = 50$ cm și $OD = 7$ cm. Calculați măsurile segmentelor [AB] și [AC].

2. Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic și M mijlocul lui [A'D']. Cunoscând $AB = 4a$, $BC = 2a$ și că aria triunghiului MBC este egală cu $5a^2$, calculați:

- volumul paralelipipedului
- distanța de la B' la AM
- distanța de la A la (MBC)

3. Într-un con cu dimensiunile $R = 8$ și $h = 6$ se face o secțiune cu un plan paralel cu planul bazei, situat față de vârf la distanța $1/3$ din înălțimea conului. Să se afle:

- aria și volumul conului
- aria și volumul trunchiului de con obținut

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1. a) 0,50p b) 0,50p c) 0,50p

2. a) 0,75p b) 0,75p

II. 1) 0,6p 2) 0,6p 3) 0,6p 4) 0,6p 5) 0,6p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 22

- I. 1. Diferența a două numere este 100. Dacă împărțim numărul mare la cel mic obținem câtul 3 și restul 20. Care sunt cele două numere ?

2. Știind că $\frac{a-13}{b} = \frac{a}{b+7}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Determinați $\frac{a}{b}$.

3. Calculați valoarea expresiei: $E = \frac{(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^n}{(-1)^{n^1} + (-1)^{n^2} + (-1)^{n^3} + \dots + (-1)^{n^n}}$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

- II. 1. Rezolvați ecuația: $mx + 1 = x + m$, unde m este un parametru real.

2. Fie $E(x) = \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2}$. Știind că $E(x) \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$,

determinați valoarea lui x .

3. Știind că $x = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ și $y = 3 - \sqrt{2}$, calculați $a = (-1)^n \cdot (x+y) = ?$, unde $n \in \mathbb{N}$.

- III.1. Măsurile unghiurilor A, B, C ale $\triangle ABC$ sunt respectiv proporționale cu 5, 6, 7. Determinați măsura unghiului format de înălțimea lui A și bisectoarea $\sphericalangle C$.

2. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal înscris în cercul de centru O .

Dacă S este proiecția lui O pe CD atunci $OS = \frac{1}{2} AB$.

3. Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$ de muchie a . Fie M mijlocul segmentului AB , O centrul pătratului $BCC'B'$. Arătați că $D'O \perp (COM)$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 1,75p 3) 0,75p

II. 1) 0,75p 2) 1,25p 3) 1p

III. 1) 0,50p 2) 1,25p 3) 1,25p

TEST NR. 23

I. 1. Fie $a = |2^n - 3| - |5 - 2^n|$, $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $|a| \in \{0, 2\}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

2. Determinați numerele \overline{ab} în baza 10 astfel încât $\sqrt{ab + ba} \in \mathbb{N}$.

3. Determinați numerele reale x , y , și z pentru care:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 34} + \sqrt{y^2 - 2y + 10} + \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 12$$

II. 1. Fie polinomul $P(X) = X^{1992} - 1992X + 1991$. Arătați că $P(X)$ se divide cu $(X - 1)^2$.

2. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} [0, (3)x - 0,1(6)y] : \frac{1}{6} = 3^{101} : 3^{102} \\ [\max(-100; -12)]x + 10 \cdot \sqrt{0,36}y = \min(-5; -18) \end{cases}$$

3. Calculați: $E = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

III.1. În $\triangle ABC$ paralelele prin B și C la bisectoarea AD ($D \in BC$) intersectează dreptele AC , respectiv AB în E , F . Demonstrați că $[BC] \equiv [EF]$.

2. În $\triangle ABC$ fie M mijlocul laturii BC , iar P și Q picioarele perpendicularelor duse din M pe AB , respectiv AC . Să se arate că $\frac{MP}{MQ} = \frac{AC}{AB}$.

3. În vârful A al unui $\triangle ABC$ se ridică $AD \perp (ABC)$. Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$ și $EF \perp BD$, $F \in BD$. Să se arate că $(BCD) \perp (CEF)$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 0,50p 3) 1,75p

II. 1) 1,50p 2) 1p 3) 0,50p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 24

I. 1. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < 2x - 3 < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < 3x - 2 < 11\}$. Determinați mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Aflați numerele naturale n , pentru care $\frac{15}{2n+1} \in \mathbb{N}$.

3. Dacă $x + y = s$ și $xy = p$ calculați $x^3 + y^3$ și $x^4 + y^4$ în funcție de s și p .
- II. 1. Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
 $X^2 - (a + b)X + ab$ și $X^2 - (a + c)X + ac$
2. Determinați $\frac{a}{b}$ știind că $\frac{3a - 2b}{5a - 3b} = \frac{1}{5}$.
3. Arătați că $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.
- III.1. Un romb are un unghi de 120° ; diagonala mică este de 7 cm. Se cere perimetrul lui.
2. Se dă trapezul ABCD în care $AD \parallel BC$ și $AB = AD = DC$, $AB = a$, și $BC = 2a$. Diagonalele AC și BD se intersectează în O. În O se ridică perpendiculara pe planul trapezului pe care se ia un punct S astfel ca $SO = \frac{a}{2}$.
- a) Să se arate că unghiurile ascuțite ale trapezului au fiecare câte 60° și că AC este perpendiculară pe AB, iar BD este perpendiculară pe DC.
- b) Să se arate că triunghiul SAB este dreptunghic
- c) Să se determine unghiul diedru format de planul (SAD) cu planul trapezului.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 0,5p

2) a) 1p b) 0,5p c) 1p

TEST NR. 25

- I. 1. Să se calculeze suma:

$$S = (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 4 + (-1)^3 \cdot 6 + \dots + (-1)^{997} \cdot 1994 + 998$$

2. Se consideră numărul întreg $n = 1994^2 - 1994 - 1993$. Să se afle x din

$$\text{proporția: } \frac{\frac{x}{1993}}{2} = \frac{1993}{\frac{n}{2}}$$

3. Arătați că dacă $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$ atunci $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a) = -1$.

II. 1. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât polinomul: $P(X) = 2^{n+1} \cdot X^n + 2^n \cdot X^{n-1} + \dots + 2^2 X - n^2$ să fie divizibil cu $Q(X) = 2X - 1$.

2. Rezolvați ecuația: $\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(3-x)^2} = 1$

3. Să se rezolve în \mathbb{N} sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$$

III.1. În $\triangle ABC$ cu $AB = \frac{2}{3} AC$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$ ducem mediana CM , unde $M \in (AB)$. Arătați că $CM = BC$.

2. În $\triangle ABC$ avem $AB = AC = 12$ cm și $BC = 8$ cm. La ce distanță de baza BC trebuie dusă paralela la BC astfel ca perimetrul trapezului format să fie 20 cm ?

3. În vârful A al $\triangle ABC$ echilateral se duce $AD \perp (ABC)$. Fie $CE \perp AB$ și $EF \perp BD$. Demonstrați că $DB \perp (CEF)$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1,25p 2) 1,25p 3) 0,50p

III. 1) 0,75p 2) 1,25p 3) 1p

TEST NR. 26

I. 1. Să se arate că $18 \mid 27^{n+1} \cdot 5^{4n+1} - 3^{3n+2} \cdot 5^{4n+2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

2. Calculați suma: $\frac{1}{3 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{830 \cdot 837}$

3. Dacă a și b sunt numere raționale invers proporționale cu c și d atunci

$$\frac{cd}{ab} = \left(\frac{c+d}{a+b} \right)^2.$$

II. 1. Pentru ce valori ale lui m și n ecuația $x^2 + mx + n = 0$ admite soluțiile 4 și -3 ?

2. Simplificați: $\frac{X^2 - Y^2 - 2YZ - Z^2}{Y^2 - X^2 - 2XZ - Z^2}$.

3. Este adevărat că $(-2) \cdot (-2)^{99} = 2^{100}$?

III.1. Un trapez ABCD ($AB \parallel CD$) este circumscris unui cerc de centru O. Să se arate că: $CO \perp OB$ și $AO \perp DO$.

2. Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 9$ cm, $AD = 15$ cm și $AA' = 20$ cm. Se cere distanța de la B' la diagonală AD'.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 27

I. 1. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$ care verifică egalitățile: $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{10}{z}$.

2. Media aritmetică a două numere este 15 iar media lor geometrică este $10\sqrt{2}$. Aflați media armonică a celor două numere.

3. Arătați că restul împărțirii prin 16 a unui pătrat perfect este tot un pătrat perfect.

II. 1. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} (m-1)x + 3y = 1 \\ x + (m+1)y = -1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

2. Aflați numerele raționale x și y care verifică relația:

$$x(\sqrt{2} + 3) + y(3 - \sqrt{2}) = 0$$

3. Simplificați fracțiile: a) $\frac{x^4 + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$ și b) $\frac{x^8 - 9}{(x^2 - \sqrt{3})(x^4 + 3)}$.

III.1. Având desenat un unghi cu măsura de 13° explicați cum obținem un unghi cu măsura de 1° având la dispoziție numai rigla și compasul.

2. În $\triangle ABC$ avem medianele AA' , $A' \in (BC)$ și BB' , $B' \in (AC)$ și $AA' = 7,5$ cm, $BB' = 6$ cm și $BC = 5$ cm. Să se afle perimetrul $\triangle ABC$ și lungimea înălțimii din A a $\triangle ABC$.

3. Dacă ABCD este un tetraedru regulat iar M un punct în interiorul tetraedrului astfel ca $MA = MB = MC = 3a$ și $MD = a\sqrt{3}$, să se afle AB.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 0,50p 3) 1,50p

II. 1) 1,25p 2) 0,75p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 28

- I. 1. Un număr de trei cifre are suma cifrelor 7. Arătați că dacă numărul se divide la 7, atunci cifra zecilor este egală cu cifra unităților.

2. Care este valoarea de adevăr a propoziției:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x - 11| = 5\} = \{-4, 6\}$$

3. Numerele a , b și c sunt distincte. Aflați soluțiile reale ale ecuației:

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 = 0.$$

- II. 1. Simplificați:
$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 3) + 1}{(x^2 - 1)(x^2 - 4) + 2}.$$

2. Fie a , b , c , d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Atunci are loc inegalitatea: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + cd + bc + bd \geq 10$.

3. Calculați: $\sqrt{8} \cdot |-2| \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$

- III.1. Fie ABC un triunghi oărecare cu $AB > AC$. Dacă CF și BE sunt respectiv medianele corespunzătoare laturilor AB și AC , $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, să se demonstreze că $BE > CF$.

2. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = AA' = a$. Să se calculeze:

- a) Distanța de la vârful A' la muchia BC
b) Distanța de la vârful B' la linia mijlocie a bazei care este paralelă cu AB

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1,50p 2) 1p 3) 0,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p 3) 0,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 29

- I. 1. Rezolvați în \mathbb{N} ecuația: $xy - x + y = 18$.

2. Aflați a știind că:
$$\frac{a}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128}} = \frac{2^7}{b}.$$

3. Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziției $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < -10\}$ are un element.

II. 1. Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, k impar, numărul $N = 10^{3k} + 2^{3k}$ se divide cu 7

2. Desompuneți în factori: $2a^2 - ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2$.

III.1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $\angle B > \angle C$. Notăm cu D mijlocul ipotenuzei BC. Perpendiculara în D pe BC intersectează cateta AC în E.

a) Să se demonstreze că $m(\angle ADE) = m(\angle B) - m(\angle C)$.

b) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $(AE) \equiv (ED)$.

2. O piramidă triunghiulară cu muchiile laterale congruente are ca bază un triunghi dreptunghic. Să se arate că planul uneia din fețele laterale este perpendicular pe planul bazei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 0,50p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 2p 2) 1p

TEST NR. 30

I. 1. Să se calculeze: $1998 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{101}{100} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right)$

2. Aflați numerele naturale n , pentru care $\frac{3}{7} < \frac{n+1}{42} \leq \frac{1}{2}$

3. Arătați că dacă $P(1+x) = P(1-x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, atunci polinomul $P(X) = X^2 + aX + 1$ este pătratul unui binom.

II. 1. Fie a, b, c numere întregi impare. Să se arate că nu există $x \in \mathbb{Q}$ care să verifice relația: $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Fie a, b, c trei numere întregi pozitive nenule astfel încât $ab < c$. Să se arate că $a + b \leq c$.

III.1. În triunghiul ABC ($AB \equiv AC$) se notează cu M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și respectiv AC. Dacă $\angle ABC = 30^\circ$ și $AM = 4$ cm, se cere să se calculeze perimetrul patrulaterului AMNP.

2. Fie ABCD un tetraedru oarecare și M un punct pe muchia AD. Să se arate că raportul AM/MD este egal cu raportul ariilor triunghiurilor ABC și DBC dacă și numai dacă M este egal depărtat de fețele ABC și DBC.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 31

I. 1. Calculați: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1988} \cdot 2^{-1988} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1988} \cdot (-2)^{1988}$.

2. Aflați trei numere știind că sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4 iar diferența dintre cel mai mare și cel mai mic este 5.

3. Rezolvați ecuația $\frac{|x-1|}{x-1} = 1$.

II. 1. Fie ABC un triunghi oarecare și O centru cercului circumscris triunghiului. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Calculați măsura unghiului $\angle DAO$ în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

2. Demonstrați că într-un trapez punctul de intersecție al laturilor neparalele și mijloacelor bazelor sunt trei puncte coliniare.

III. 1. Fie α_1 și α_2 două plane perpendiculare și d dreapta lor de intersecție. Fie $A \in \alpha_1$ și $B \in d$ astfel încât $AB \perp d$. Fie $a \subset \alpha_2$ o dreaptă oarecare. Ce se poate spune despre dreptele AB și a ?

2. Fie triunghiul echilateral ABC de latură a și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [BM]$ și $[AN] \equiv [NC]$. Se îndoaie triunghiul de-a lungul lui MN până când $(AMN) \perp (BMC)$. Calculați măsura unghiului diedru al planelor (ABC) și (BMC).

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 2p

III. 1) 1p 2) 1,50p

TEST NR. 32

I. 1. Calculați: $\frac{3+6+9+\dots+1995+1998}{2+4+6+\dots+1330+1332}$.

2. Aflați numerele naturale n pentru care $\frac{2n-5}{n+1} < 1$.
3. Avem patru robinete. Primul robinet umple un bazin într-o oră, al doilea în două ore, al treilea robinet în trei ore iar al patrulea robinet în patru ore. În cât timp umplu bazinul cele patru robinete împreună?
- II. 1. Să se arate că triunghiul cu laturile de lungimi a, b, c între care există relația: $2(a-b)(a+c) = (a-b+c)^2$ este dreptunghic.
2. Fie triunghiul oarecare ABC și A', B', C' punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC, CA , respectiv AB . Calculați lungimile segmentelor AC', BA' și CB' .
- III.1. Pe planul pătratului $ABCD$ ($AB = a$) se ridică perpendiculara $BB' = a$. Fie N mijlocul lui $B'D$, M mijlocul lui AB și P mijlocul lui BC . Să se calculeze aria triunghiului MNP și să se arate că $B'D \perp (MNP)$.
2. Înălțimea unui con circular drept este 15 iar suma dintre generatoare și rază este 25. Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p
 II. 1) 1p 2) 1,50p
 III. 1) 2p 2) 1p

TEST NR. 33

- I. 1. Calculați:
$$\frac{(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4) : (3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5) - \frac{3}{4} + 2, (3) + \frac{22}{33}}{(489 \cdot 7 + 311 \cdot 7 - 777 \cdot 7 - 23 \cdot 7) + 2}$$
2. Se dă ecuația: $\frac{3x+1}{x-5} = m, x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Să se rezolve și să se determine $m \in \mathbb{Z}$ așa încât soluția să fie număr întreg.
3. Suma a trei numere naturale consecutive este 1209. Aflați cele trei numere.
- II. 1. Două unghiuri adiacente au bisectoarele perpendiculare. Să se afle măsura fiecărui unghi știind că măsura unuia dintre ele este de cinci ori mai mare decât a celui alt.
2. Fie $ABCD$ un romb și E un punct oarecare pe una dintre diagonale. Dacă M, N, P, Q sunt picioarele perpendicularelor din E respectiv pe dreptele AB, BC, CD și DA , arătați că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

III.1. O dreaptă a conținută în planul α este paralelă cu un alt plan β . Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: "Planul α este paralel cu planul β ".

2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan paralel cu AC și BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P și pe AD în N. Demonstrați că MNPQ este paralelogram.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 2p

III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 34

I. 1. Alfați valoarea lui x din egalitatea:

$$10 \cdot \{x - 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]\} = 100$$

2. Într-o excursie Ioana cheltuiește $\frac{3}{4}$ din economiile ei, ceea ce reprezintă 240 000 lei. Ce sumă avea Ioana ?

3. Calculați: $E(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b + 1$ știind că $x^2 + ax + b = 0$.

II. 1. Fie f și g două funcții liniare. Determinați aceste funcții știind că $2f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14$ și $f(x+1) - 2g(x-1) = 6x + 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că sunt direct proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{6}$.

III.1. Fie ABCD un dreptunghi. În D se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului pe care se ia punctul M. Fie P și Q proiecțiile punctelor A, respectiv C pe MB. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm și $PQ = 3$ cm, să se calculeze MB.

2. Se dă un cub ABCDA'B'C'D' de muchie a.

a) Calculați distanța de la punctul A la diagonală BD'

b) Demonstrați că $BD' \perp (AB'C)$

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 35

I. 1. Calculați:

$$2^3 + [(2^3)^7 - (2^7)^3 + 3 \cdot 3^4 - 81] : \{3^2 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2^{1986} : 2^{1985} \cdot 3)]\}$$

2. În două cutii sunt la un loc 120 creioane. Să se afle numărul de creioane din fiecare cutie știind că dacă luăm 15 creioane din prima cutie și le punem în cea de-a doua, atunci în cele două cutii se va afla același număr de creioane.

3. Arătați că: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{z^2 - 6z + 9} = 0$ dacă și numai dacă $x = 1, y = 2, z = 3$.

II. 1. Calculați aria trapezului isoscel ABCD unde $AB \parallel CD$ știind că $AB = 26$, $DC = 16$ și $AC \perp CB$.

2. Să se demonstreze că suma distanțelor vârfurilor unui triunghi la o dreaptă exterioară triunghiului este egală cu suma distanțelor mijloacelor laturilor triunghiului la aceeași dreaptă.

III. 1. Se dă o prismă patrulateră regulată ABCDA'B'C'D'. Latura pătratului bazei este de 2 cm, iar diagonala AC' este de 4 cm.

a) Demonstrați că triunghiul ACC' este isoscel

b) Să se calculeze aria totală a prisme.

2. Un cub ABCDA'B'C'D' este înscris într-o sferă cu raza de a cm. Aflați volumul cubului.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 36

I. 1. Prețul de cost al unui obiect a fost la început 2500 lei. După două reduceri consecutive cu același număr de procente, prețul a scăzut la 2025 lei. Cu cât la sută a scăzut prețul de cost la fiecare reducere?

2. Calculați suma $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 1995 + 1997 + 1999$

3. Arătați că $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

II. 1. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(a, b) = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

2. Să se arate că paralela EF dusă la bazele unui trapez ABCD prin punctul M de intersecție al diagonalelor este împărțită în două părți egale de acest punct.

III.1. Într-un trunchi de con $R = 13$ cm, $r = 5$ cm, iar generatoarea este înclinată pe bază cu un unghi de 45° . Să se afle aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con.

2. Să se afle volumul unui tetraedru regulat de muchie a .

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 37

I. 1. Efectuați:
$$\frac{30 \cdot 4 \frac{1}{4} - 11 \frac{1}{5} : 9 \frac{1}{3}}{14 : 2 \frac{2}{9} + 8 \frac{2}{5} \cdot 14 \frac{2}{7}} : \frac{1 : 6 + 12 : 5}{2 \frac{1}{2} \cdot 15 - 4 \frac{13}{15} \cdot 7 \frac{3}{5}}$$

2. Rezolvați ecuația:
$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 = 0.$$

3. Fie trei numere întregi astfel încât fiecare din ele reprezintă media aritmetică a celorlalte două. Arătați că cele trei numere sunt egale.

II. 1. Determinați funcția de gradul I (liniară) al cărui grafic trece prin punctele $A(3, 1)$ și $B(1, 3)$.

2. Comparați numerele: $\sqrt{7} - 3$ și $\sqrt{11} - 4$.

III.1. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se iau segmentele $[BM] \equiv [CM]$ (M între A și B , N pe prelungirea lui $[AC]$). Să se demonstreze că dreapta BC trece prin mijlocul lui $[MN]$.

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ se cunosc $AA' = a$, $AB = b$ iar $AD = c$. Diagonala paralelipipedului formează cu cele trei fețe din care pornește unghiuri de măsuri α , β , γ . Demonstrați că:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 38

I. 1. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 < x < 8\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 < x \leq 3\}$.

a) Scrieți cu ajutorul intervalelor mulțimile A și B .

b) Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ și $(B \setminus A) \cap \mathbb{Z}$, unde \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi.

2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Aflați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

3. Rezolvați ecuația: $mx - 3 = 3m - x$, unde m este un parametru real.

II. 1. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(x) = \left\{ \left[\frac{(8+x^3)(x-2)}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} \right]^2 + \frac{2x^2 - 8}{x^2} + 1 \right\} : \frac{2x^2 - 4}{x^4}$$

2. Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi oarecare și piciorul uneia din înălțimile triunghiului sunt vârfurile unui trapez isoscel.

III.1. O piramidă are ca bază un triunghi echilateral cu latura a . Să se afle volumul acestei piramide știind că înălțimea ei este de două ori mai mare decât înălțimea triunghiului de bază.

2. Fie tetraedrul $VABC$ în care $VB \equiv VC$. Muchiile VA , AB și AC se împart în trei părți egale și se notează cu M , N , P punctele cele mai apropiate de A . Să se arate că aria triunghiului MNP este a noua parte din aria feței VBC .

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 39

I. 1. Calculați: $-\sqrt{2} - \sqrt{(-2)^2} + |1 - \sqrt{2}| + 2|\sqrt{8} - 3| + |-\sqrt{2}|^2$.

2. Să se determine x, y, z știind că $x - y = \frac{y+z}{4} = \frac{z}{2}$ și $x + 2z = 14$.

3. Să se arate că $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ și să se determine toate numerele întregi x astfel încât $x^2 < 7 - 4\sqrt{3}$.

II. 1. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(x) = \left[\left(\frac{1-8x^3}{4x^4+2x^3+x^2} \cdot \frac{1+2x}{x^2} \right)^3 + \frac{12x^2-48x^4}{x^{12}} \right] \cdot \frac{x^{12}}{1+4x^2+16x^4}.$$

2. Fie patrulaterul ABCD în care $m(\angle A) = m(\angle C)$. Bisectoarea unghiului B taie laturile DC și AD în punctele E și F. Să se demonstreze că triunghiul DEF este isoscel.

III.1. Pe planul pătratului ABCD cu latura a se ridică perpendicularele

$AM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $CP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Se unește P cu M. Demonstrați că planele triunghiurilor MBD și PBD sunt perpendiculare.

2. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu $\frac{2}{3}$ din diametru. Să se afle aria laterală, aria totală și volumul conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 1p

TEST NR. 40

I. 1. Calculați:

a) $(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $3^n + (-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$

2. La un spectacol se distribuie 320 bilete, unele cu 300 lei biletul și altele cu 400 lei biletul. Câte trebuie să se vândă din fiecare fel pentru a se obține 100 000 lei?

3. Să se rezolve sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 5x + 3 > -7 \\ mx \geq 0 \end{cases}$$
 în funcție de valorile parametrului real m .

II. 1. Simplificați fracția:
$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{2x^2 - 2x + 2}$$

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) în care se cunosc lungimile catetelor $AB = c$ și $AC = b$. Să se afle ariile triunghiurilor ABD și BDC obținute prin ducerea bisectoarei unghiului B ($D \in AC$).

III.1. Se consideră un unghi $\angle AOB$ cu măsura de 120° . Pe bisectoarea acestui unghi se ia un punct P astfel încât $OP = 6$ cm. În P se ridică o perpendiculară pe planul unghiului pe care se consideră punctul Q astfel încât $PQ = 4$ cm. Aflați distanțele de la Q la laturile unghiului.

2. Se dă un tetraedru regulat de muchie a . Să se determine înălțimea, apotema și valoarea cosinusului unghiului diedru a două fețe ale tetraedrului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 1,50p

TEST NR. 41

I. 1. Știind că $\frac{7a-2b}{10a+8b} = \frac{4}{15}$, să se determine $\frac{a}{b}$.

2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât să aibă loc egalitatea: $3^n = 2^n$.

3. Rezolvați în \mathbb{Z} inecuația: $\frac{7y-5}{y+4} \leq 3$.

II. 1. Să se determine a și b astfel încât polinomul $P(X) = X^4 + aX^3 - X^2 + bX + 3$ împărțit la $X - 2$ să dea restul 5 și împărțit la $X + 3$ să dea restul 1.

2. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0 \end{cases}$$
, unde a, b sunt parametri reali nenuli.

III.1. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 2 \cdot BC$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. Fie M mijlocul laturii CD . Fie $\{E\} = AM \cap BD$.

a) Demonstrați că triunghiul BCM este echilateral.

b) Demonstrați că $ABMD$ este un trapez înscris în cercul de diametru AB .

2. Un sector circular de 120° cu aria de $12\pi \text{ cm}^2$ se înfășoară astfel încât să formeze suprafața laterală a unui con. Se cere:

a) Să se afle aria totală a conului și volumul conului.

b) Să se afle aria sferei înscrisă în conul obținut.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 42

I. 1. Să se rezolve ecuația: $|x - 2| + |2x - 4| + |3x - 6| = 0$.

2. Aflați media geometrică a numerelor 7 și 10 cu două zecimale exacte.

3. Trei numere sunt invers proporționale cu numerele 4, 9 și 16. Să se afle cât la sută reprezintă al doilea număr din media aritmetică a celorlalte două.

II. 1. Aflați câtul și restul împărțirii polinomului $4X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ la $X^2 + 1$.

2. Găsiți cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 3, 5, 7 dă același rest 1 și câtul diferit de 0.

III.1. Se dă un cub cu lungimea diagonalei a . Să se afle volumul său.

2. Într-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 36 \text{ cm}$, $AD = 15 \text{ cm}$. Diagonala mare BD este împărțită de diagonala mică AC în raportul $\frac{3}{10}$. Înălțimea piramidei este $VO = 40$

cm, O fiind punctul de intersecție al diagonalelor bazei. Să se afle perimetrul triunghiului VOD și volumul piramidei.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1,50p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 0,50p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 43

I. 1. Să se calculeze valoarea expresiei $E = 2a - 2b + c - 2d$ pentru:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}-1}; b = \frac{1}{\sqrt{3}+2}; c = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; d = \frac{1}{\sqrt{5}+1}.$$

2. Ce oră este dacă mai rămâne din zi $1/7$ din ceea ce a trecut ? (Ziua are 24 de ore și începe la 12 noaptea).

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că, oricare ar fi $t_1, t_2 \in (0, 1)$ cu proprietatea $t_1 + t_2 = 1$, atunci $t_1 \cdot a + t_2 \cdot b \in (a, b)$.

II. 1. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi verifică egalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

este echilateral.

2. Să se demonstreze că polinomul $nX^n - (n-1)X^{n-1} + (n-2)X^{n-2} - \dots + n + 1$ este divizibil cu $X - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor 9 și 15, iar generatoarea 10. Să se afle aria laterală și volumul conului din care provine trunchiul de con.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 2p

II. 1) 2p 2) 1p

III. 1,50p

TEST NR. 44

I. 1. Efectuați:

a) $(-2)^3 + 10 \cdot [(-1)^{1000} + (-1)^{99} + 2 \cdot (-2 + 2 \cdot 3)].$

b) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-4)^5 : 4^4 - 2]\}.$

2. Suma a două numere prime este 39. Să se determine numerele.

3. Simplificați fracția: $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x^2 - 3x - 14}$.

II. 1. Determinați relația între numerele naturale m și n astfel încât, polinoamele $P(X) = m \cdot X^{2n+1} + nX + m + n$ să se dividă prin $X^2 - 1$.

2. Rezolvați ecuația $2mx = x + 4m - 2$ făcând discuție după valorile parametrului real m .

III. 1. Unghiurile triunghiului ABC sunt direct proporționale cu 14, 12 și 10. Bisectoarea $\angle ABC$, $[BN]$ ($N \in AC$) intersectează segmentul $[AM]$, simetricul lui $[AB]$ față de înălțimea $[AD]$ în punctul P . Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $PMCN$.

2. Să se afle volumul unui cub înscris într-o sferă de rază r .

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p; 2) 1,50p; 3) 1p

II. 1) 1,50p; 2) 1,50p

III. 1) 1p; 2) 1,50p

TEST NR. 45

I. 1. Efectuați:

$$a) \frac{\left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{-3} \right)^2 - \left(-\frac{4}{9} \right) + (-2)^2 \right]^3}{\left(-\frac{5}{6} \right)^3 - (-1)^3 - 1} + \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}$$

$$b) \frac{\left[\left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{200} + \frac{1}{2^{201}} \right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{5} \right)^{99} : \frac{1}{5^{98}} \right]}{\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{100} : \frac{1}{2^{98}} \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{60} : \left(\frac{1}{5} \right)^{30} \right]}$$

2. Descompuneți în factori polinomul $P(X) = X^4 + 64$.

3. Tatăl are azi 28 ani și fiul 8. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului ?

II. 1. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 3y = 1 \\ 3\sqrt{2}x + 7y = 1 \end{cases}$$

2. Fie $a, b \in \mathbf{R}_+$. Demonstrați inegalitatea: $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$.

III.1. Fie ABC un triunghi oarecare și AD bisectoarea unghiului $\angle BAC$ ($D \in BC$). Pe [BA fie punctul E astfel încât $A \in (BE)$ și $[AE] \equiv [AC]$. Demonstrați $AD \parallel EC$.

2. Fie ABCD și DCEF două pătrate situate în plane perpendiculare. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor EF, AD, AB.

- Să se arate că triunghiul MNP este dreptunghic.
- Să se calculeze tangenta unghiului diedru format de planele (MNP) și (ABC).

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p; 2) 1,50p; 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 46

I. 1. Calculați media aritmetică a numerelor a și b , unde:

$$a = \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{5}}}{5\sqrt{1+\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{5}}}, \quad b = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \right] \cdot \frac{9}{2437}$$

2. Să se împartă numărul 49 în trei părți astfel încât dacă adăugăm primei părți $1/3$ din suma celorlalte două, celei de-a doua $1/4$ din suma celorlalte două, iar celei de-a treia $1/5$ din suma celorlalte două să obținem numere egale.

$$3. \text{ Rezolvați sistemul de inecuații: } \begin{cases} \frac{1+x}{1} < 1 + \frac{x}{3} \\ \frac{3x+2}{2} \leq \frac{2x+1}{4} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

II. 1. Găsiți aria triunghiului determinat de axele de coordonate și de graficul funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 5$.

2. Să se arate că oricare ar fi x număr real nenul: $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$.

3. Descompuneți în factori polinomul $X^4 + X^2 + 4$.

III.1. Fie ABCD un triunghi oarecare și D un punct situat pe prelungirea lui AC astfel încât $\angle BAC \equiv \angle CBD$. Demonstrați că BD este medie proporțională între AD și CD.

2. Un cilindru circular drept are raza bazei de 1,5 cm iar aria secțiunii axiale de 12 cm. Să se afle:

- Diagonala secțiunii axiale.
- Aria laterală, totală și volumul cilindrului.
- Diagonala desfășurării feței laterale a cilindrului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 47

I. 1. Să se afle x din egalitatea:

$$\left\{ \left[4\frac{3}{5} - \frac{6\frac{1}{14}}{13\frac{1}{3} : \left(5\frac{1}{3} - x\right) - 3\frac{4}{7}} \right] \cdot \frac{9}{14} + 1\frac{1}{3} \right\} : 4\frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

2. Să se arate că suma pătratelor a trei numere consecutive mărită cu 1 este un număr divizibil cu 3.

3. Să se afle toate perechile de numere naturale care au media geometrică (proporțională) egală cu 11.

II. 1. Trasați graficul funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \\ 1, & \text{pentru } x \in (-1, 1) \\ x, & \text{pentru } x \in [1, \infty) \end{cases}$

2. Arătați că dacă, $b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$, atunci $a = b = c$.

III.1. Se dă un triunghi ABC în care $AB = AC = 6$ cm și $\angle A = 120^\circ$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi și D punctul diametral opus lui A.

- Să se demonstreze că triunghiul BCD este echilateral.

- b) Fie d o dreaptă perpendiculară în O pe planul triunghiului BCD și M un punct oarecare situat pe d . Demonstrați că $MB = MC = MD$
- c) Să se arate că $MB \perp CD$.
- d) Calculați volumul tetraedrului $MBCD$ știind că $MB = 6\sqrt{3}$ cm.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 2p

TEST NR. 43

- I. 1. Comparați numerele: a) $(0,1)^{10}$ și $(0,1)^{11}$; b) $(0,1)^5$ și $(0,01)^5$.
2. Diferența a două numere naturale este 46. Aflați cele două numere știind că împărțind pe cel mai mare la cel mai mic se obține câtul 3 și restul 2.
3. Aflați $x \in \mathbb{R}$ știind că $5 - \frac{x-5}{5} < x < 6 - \frac{x-6}{6}$.
- II. 1. Măsurile unghiurilor unui patrulater sunt direct proporționale cu numerele 3, 6, 12 și 15. Aflați măsurile acestor unghiuri.
2. Polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + 1$ este divizibil cu $X^2 - 1$. Să se determine a și b iar apoi să se descompună în factori polinomul pentru a și b găsiți.
- III.1. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC . Prin B și C ducem paralele la AD . Acestea întâlnesc prelungirea lui AC în M și prelungirea lui AB în N . Demonstrați că $MB \cdot DC = NC \cdot DB$.
2. Fie pătratul $ABCD$ și M un punct în spațiu astfel încât $MA \perp (ABC)$. Demonstrați că există un punct în spațiu egal depărtat de A, B, D și M .

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p; 2) 1p; 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 49

- I. 1. Știind că $a - \frac{1}{a} = 5$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se calculeze $a^2 + \frac{1}{a^2}$ și $a^3 - \frac{1}{a^3}$.
2. 20 de metri de stofă costă 140 000 lei. Câți lei vor costa 8 metri de stofă din același material ?
3. Aflați pe x din proporția $\frac{x}{2} = \frac{5a5}{3}$, unde a este o cifră cu proprietatea că numărul $5a5$ este divizibil cu 9.
- II. 1. Demonstrați că în orice triunghi jumătatea perimetrului este mai mare decât orice latură.
2. Rezolvați în \mathbb{Z} sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 3x + 7 > 7x - 9 \\ x - 3 > -3x + 1 \end{cases}$$
- III.1. În triunghiul ABC se duce o paralelă la mediana AD care taie laturile AB, AC respectiv în E, F. Demonstrați că $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.
2. Fie planul α și semidreapta OX ($O \in \alpha$) care face cu planul α un unghi de 30° . Un punct A situat de aceeași parte a planului α cu OX se proiectează pe α în B iar pe OX în C. Se cere:
- Să se calculeze BC dacă $OA = 17$ cm, $OB = 8$ cm, $OC = 12$ cm.
 - Fie C' proiecția lui C pe α și M mijlocul lui OC' . Demonstrați că $MA \perp OC'$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu
I. 1) 1,50p 2) 1p 3) 1p
II. 1) 1p 2) 1p
III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 50

- I. 1. Calculați suma $S = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 1994 - 1996 + 1998$.
2. 10 muncitori pot termina o lucrare în 10 zile lucrând câte 10 ore pe zi. În câte zile vor termina lucrarea 5 muncitori dacă ei lucrează 5 ore pe zi ?

3. Există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{4x-5y+1} + \sqrt{-5x-4y+9} = 0$?
- II. 1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât 3 să fie soluție a ecuației $\frac{m}{3} - x = \frac{x}{3} - m$.
2. Căturile împărțirii unui polinom $P(X)$ prin $X - a$, $X - b$ sunt respectiv $X^2 - 4X + 5$ și $X^2 - 6X + 3$. Să se determine a și b și polinomul știind că termenul liber al polinomului este 1.
- III.1. Fie M un punct pe diagonală AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce $MP \parallel AB$ și $MQ \parallel CD$ unde $P \in BC$, iar $Q \in AD$. Demonstrați că $\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$.
2. Fie A și B două puncte situate în două plane α și β perpendiculare între ele. Considerăm AA' și BB' perpendicularele din A și B pe intersecția planelor. Notăm $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$. Să se calculeze lungimea segmentului AB și tangentele unghiurilor formate de AB cu planele α și β .

Barem de corectare:

- 1 punct din oficiu
 I. 1) 1,50p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1p 2) 1,50p
 III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 51

I. 1. Calculați:
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}}$$

2. Știind că $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{12}{c} = 13$ să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

3. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, numărul $\sqrt{1000 - 25\sqrt{n}}$ este număr natural?

II. 1. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{3-x}{2} < \frac{x}{5} \\ 4x < 3x+1 \end{cases}$$

2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Găsiți un punct situat pe graficul funcției ce are coordonatele egale.

III.1. Latura unui triunghi echilateral are lungimea de 8 cm. Calculați raza unui cerc a cărui arie este un sfert din aria triunghiului.

2. Un con se secționează printr-un plan paralel cu baza la o distanță egală cu $\frac{1}{3}$ din înălțime față de vârful conului. Trunchiul de con obținut are volumul de 52 cm^3 . Aflați volumul conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 2p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 1,50p

TEST NR. 52

I. 1. a) Aflați un număr știind că $\frac{3}{4}$ din el este 30.

b) Din 45 kg de apă de mare se obțin 500g de sare. Ce cantitate de apă de mare este necesară pentru a obține 20 kg de sare ?

2. Media aritmetică a trei numere naturale este 20. Primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea. Media aritmetică dintre al doilea și al treilea este 25. Să se afle cele trei numere.

3. Să se împartă numărul 4200 în părți direct proporționale cu numerele 5, 9, 12 și 14.

II. 1. Scrieți expresia $x^6 - 2x^3$ ca o diferență de pătrate.

2. Aflați aria unui triunghi cu laturile de lungimi 6, 8 și 10.

III.1. Fie M și N mijloacele laturilor neoparalele ale unui trapez iar P și Q mijloacele diagonalelor sale. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și fie D un punct al perpendicularei dusă în B pe planul triunghiului. Notăm cu M și N proiecțiile punctului A pe dreptele BC și CD iar cu P și Q proiecțiile punctului B pe dreptele AD și CD. Demonstrați că planele (AMN) și (BQP) sunt paralele și că triunghiurile AMN și BQP sunt asemenea.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p; 2) 1p; 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 2p 2) 2p

TEST NR. 53

I. 1. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $3n + 1 \mid 2n + 4$.

b) Aflați media aritmetică a numerelor $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ și $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

2. Determinați valorile întregi ale parametrului real m astfel încât soluția ecuației $mx + 7 = m - x$ să fie un număr strict pozitiv.

3. Într-o clasă sunt 32 elevi. Cât la sută din numărul fetelor reprezintă numărul băieților știind că numărul fetelor este cu 16 mai mare decât numărul băieților?

II. 1. Fie funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ și $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$.

Demonstrați că $f(x_1) \neq f(x_2)$ și că $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

2. Simplificați fracția: $\frac{4x^3 + 3x^2 - 4x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

III. 1. Demonstrați că într-un triunghi echilateral suma distanțelor de la un punct din interiorul triunghiului la laturi este egală cu înălțimea triunghiului echilateral.

2. Fie ABCD un pătrat de centru O și d_1, d_2 perpendicularele duse din A și C pe planul pătratului. Fie $M \in d_1$ și $N \in d_2$ astfel încât $MN \perp OM$. Demonstrați că $MN \perp (BMD)$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 1p b) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 54

I. 1. Comparați numerele $a = (27^{31} - 2 \cdot 9^{46} + 4^{102} : 2^{203} - 3^{92})^{213}$ și $b = (-2)^{142}$.

2. Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea: $|x| + x = 0$?

3. Ecuația $(x - 1)^2 = x^2 + 2x - 3$ și inecuația $x^{1998} - \frac{1}{2} > 0$ au soluții comune?

- II. 1. Fie funcția liniară $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demonstrați că $f(x-1) + 2f(x+2) = 3f(x+1)$, oricare ar fi x real.
2. Fie polinoamele $P(X) = X^8 - X^5 - X^3 + 1$ și $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Demonstrați că polinomul $Q(X)$ divide polinomul $P(X)$.
- III.1. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic mediana și înălțimea duse din vârful unghiului drept formează între ele un unghi egal cu diferența unghiurilor ascuțite ale triunghiului.
2. Fie trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $AD = AB + DC$. Se consideră $E \in BC$ astfel încât $CE = BE$. În punctul D ducem perpendiculara DF pe planul trapezului astfel încât $DF \equiv AE$. Demonstrați că $FE = AD$ și $FE \perp AE$.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p	2) 1p	3) 1p
II. 1) 1p	2) 1p	
III. 1) 2p	2) 2p	

TEST NR. 55

- I. 1. Două numere au raportul $1/4$ iar media lor aritmetică este 15. Să se afle numerele.
2. Calculați: $|\sqrt{5} - 3| - |\sqrt{7} - 5| + |\sqrt{11} - \sqrt{7}|$.
3. Comparați numerele: $\sqrt{13} - 7$ și $\sqrt{15} - 8$.
- II. 1. O persoană își depune economiile la C.E.C. cu o dobândă de 10% pe an. Ce sumă a depus persoana dacă după doi ani are 121 000 lei?
2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = mx + 4$. Determinați $m \in \mathbf{R}$, știind că punctul $A(3, 10)$ aparține graficului funcției.
- III.1. Determinați laturile unui triunghi dreptunghic, știind că diferența catetelor este 1 iar lungimea ipotenuzei este 5.
2. Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este egală cu 225π , generatoarea 25, iar înălțimea 24. Calculați volumul trunchiului de con.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p	2) 1p	3) 1,50p
II. 1) 1,50p	2) 1p	
III. 1) 1p	2) 2p	

TEST NR. 56

I. 1. Efectuați:
$$\left[\left(1 : \frac{\frac{x^4 + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - x\sqrt{2} - 2}{x^6 - 1} \right) + x^6 \right] : (x^4 + 1).$$

2. Trei muncitori pot termina o lucrare în 4 zile. Primul, lucrând singur o poate termina în 10 zile, iar al doilea în 12 zile. În câte zile o poate termina al treilea ?

3. Determinați $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația $m^2x + 3 = 9x + m$ să nu admită soluții reale.

II. 1. Rezolvați inecuația $mx + 1 \leq x + m$, unde m este un parametru real oarecare.

2. Fie polinoamele $P(X) = X^3 - 3X^2 + mX - 3$ și $Q(X) = X^2 - nX + 1$, unde $m, n \in \mathbf{R}$. Determinați pe m și n astfel încât Q să dividă P .

III.1. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor duse pe laturile AC și AB ale triunghiului ABC și M și N intersecțiile bisectoarei unghiului A cu aceste înălțimi. Demonstrați că triunghiul HMN este isoscel.

2. Latura unei piramide hexagonale regulate este de 6 cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45° . Să se afle volumul piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 57

I. 1. Calculați: $(a^{10} + a^{11} + \dots + a^{20}) : (a^0 + a^1 + \dots + a^{10})$.

2. Aflați pe x din egalitatea:

$$\left\{ \left[\left(\frac{2x-3}{5} - 0, (3) \right) \cdot 3\frac{1}{2} - 3 - 4, (3) \right] : \frac{1}{5} + 5 \right\} : 0, (5) = 27.$$

3. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 124\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 38 < x < 100\}$. Calculați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

- II. 1. Demonstrați că orice număr impar se poate scrie ca diferența pătratelor a două numere naturale.
 2. Determinați funcția liniară $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ cu proprietatea că $f(x+1) = 5x + 2$, oricare ar fi x real.
- III.1. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc, D punctul în care perpendiculara din A pe BC taie cercul și E punctul diametral opus vârfului A. Demonstrați că unghiurile $\angle BAE$ și $\angle DAC$ sunt congruente.
 2. Un con cu raza bazei de lungime a are generatoarea egală cu diametrul bazei. Calculați volumul și aria sferei circumscrise conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu
 I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1,50p 2) 1,50p
 III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 58

- I. 1. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale consecutive este divizibil cu 3.
 2. Raportul dintre suma și diferența numerelor x și y este $\frac{9}{5}$. Aflați valoarea raportului $\frac{x}{y}$.
3. Rezolvați sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ \frac{1}{2} - 3x \leq \frac{2}{3}x - 5 \end{cases}$$
- II. 1. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic înălțimea coborâtă din vârful drept este cel mult egală cu jumătatea ipotenuzei.
 2. Descompuneți în factori polinomul: $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.
- III.1. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc, BD și CE două înălțimi ale triunghiului, H intersecția lor și G punctul diametral opus lui A. Ce fel de patrulater este BGCH?
 2. Se consideră o sferă cu raza de 3 cm care se nichelează depunându-se pe ea un strat de nichel gros de 1 mm. Se cere volumul cantității necesare de nichel.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1,50p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 59

I. 1. Demonstrați indentitatea:

$$\frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1} : \left[1 + \frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2} \right] = -\frac{1}{1+a^2}.$$

2. Fie a, b două numere naturale astfel încât a + b este un număr impar. Demonstrați că a · b este număr par.

3. Arătați că numărul $\sqrt{5}$ este irațional.

II. 1. Simplificați fracția: $\frac{x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^4 - 4x^2 - 4x - 1}$.

2. Demonstrați că polinomul $Q(X) = X^2 + X$ divide polinomul $(X+1)^n - X^n - 1$ pentru $n \in \mathbb{N}$, n impar.

III.1. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri alăturate al unui paralelogram sunt perpendiculare.

2. Se consideră o piramidă care are ca bază un triunghi dreptunghic isoscel și a cărui înălțime congruentă cu o catetă a bazei (= a) cade în vârful unui unghi ascuțit al bazei. Aflați lungimile muchiilor laterale și volumul piramidei.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 2p

II. 1) 1,50p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 60

I. 1. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{8x1y}$ divizibile cu 15.

2. O minge se ridică la $\frac{5}{7}$ din înălțimea de la care cade. De la ce înălțime a căzut prima oară dacă a treia oară s-a ridicat la $\frac{1250}{343}$ m ?

3. Fie mulțimile $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{n-2} \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{n} \in \mathbb{N} \right\}$.

Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ și $A \times B$.

II. 1. Rezolvați inecuația: $\frac{|x-4|}{|x-2|+3} \leq 0$.

2. Demonstrați că oricare două înălțimi ale unui triunghi sunt invers proporționale cu laturile pe care cad.

III.1. Fie ABCD un paralelogram cu $AB = 2a$, $AD = a$ și $m(\angle DAB) = 60^\circ$.

De aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendiculare pe plan în A, B, C și D. Pe perpendiculara în B se ia $BM = 2a$, pe perpendiculara în D se ia $DN = 3a$ iar pe perpendiculara în C se ia P astfel încât $MP = NP$.

a) Calculați CP.

b) Perpendiculara în A pe planul (ABCD) taie planul (MNP) în Q. Calculați lungimea lui AQ.

c) Să se calculeze distanțele de la P și Q la dreapta BD.

2. Aflați volumul unui tetraedru regulat înscris într-o sferă de rază r.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 61

I. 1. Determinați $n \in \mathbb{N}$ minim astfel încât $\frac{27n+65}{8} \in \mathbb{N}$.

2. Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziției:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x+18| + |x-4| = 0\} \neq \Phi.$$

3. Să se studieze monotonia funcției:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, 4] \\ 2x-1, & x \in (4, \infty) \end{cases}$$

II. 1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, expresia: $3 \cdot 9^n + 5 \cdot 17^n$ este divizibilă cu 8.

2. Să se determine a, b, c $\in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul:

$$P(X) = X^4 + (a+4)X^3 + bX^2 + 6X + c$$

să se dividă prin polinomul $Q(X) = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

3. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$ și $a + b = 1$ atunci $a^3 + 3ab + b^3 = 1$.

III.1. Fie ABC un triunghi oarecare. Dreptata ce trece prin B și este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris $\triangle ABC$ intersectează pe AC în D. Să se demonstreze că: $AB^2 = AC \cdot AD$.

2. Un triunghi ABC cu laturile $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 7$ cm are latura BC inclusă într-un plan α . Să se afle aria proiecției triunghiului pe plan știind că proiecția este un triunghi dreptunghic.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 62

I. 1. Dacă $a, b, c \in \mathbf{N}$ și $2a - 3b + 8c = 0$ atunci $6 \mid b(a + c)$.

2. O bancă dă o dobândă anuală de 5%. Ce sumă primește peste 3 ani o persoană ce a depus 100\$?

3. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, astfel încât: $a^2 \leq b$; $b^2 \leq c$; $c \leq a^2$.

II. 1. Să se determine numerele naturale \overline{abc} astfel încât suma pătratelor cifrelor sale să fie pătratul unui număr prim de forma $3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$.

2. Să se arate că numărul $N = 15^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ este divizibil cu 27.

III.1. În triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, D este piciorul înălțimii lui A, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se calculeze lungimea segmentului DO.

2. Volumul unui con este V. Conul este împărțit în trei corpuri prin două plane paralele ce trec prin două puncte ale înălțimii ce o împart în trei segmente congruente. Să se calculeze volumul corpului din mijloc.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 2p 2) 1p

III. 1) 1p 2) 2p

TEST NR. 63

- I. 1. Simplificați: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
2. a) Dacă x și y sunt numere pozitive, arătați că $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$.
- b) Dacă $x+y=k$, atunci cea mai mare valoare a produsului xy este $\frac{k^2}{4}$.
3. Să se determine a și b reali, astfel încât următoarele polinoame să se dividă: $P(X) = X^4 - 3X^3 + ax + b$; $Q(X) = X^2 - 5X + 4$.
- II. 1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^+$ și $x + y = 1$. Să se arate că: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$.
2. Să se demonstreze că numărul: $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ se divide prin 6, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- III.1. Fie ABC un triunghi oarecare, $AA' \perp BC$ și R raza cercului circumscris triunghiului. Să se demonstreze că:
- a) $AB^2 - AC^2 = A'B^2 - A'C^2$.
- b) $AB \cdot AC = 2R \cdot AA'$.
2. Aria totală a unei piramide patrulatere regulate este S și fața laterală are unghiul de la vârf egal cu 60° . Să se calculeze înălțimea piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 2p 2) 1p

III. 1) a) 1p b) 1p; 2) 1p

TEST NR. 64

- I. 1. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:
- $a = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$,
- $b = 1998 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 1997)$.
2. Fie șirul de rapoarte $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$. Știind că $abc = 840$, să se afle a, b, c .
- II. 1. Suma cifrelor unui număr de trei cifre este 12. Dacă adăugăm la acest număr 99, obținem un număr format din aceleași cifre așezate în ordine inversă. Știind că cifra zecilor este un număr prim, să se afle numărul.

2. Raportul dintre aria și lungimea unui cerc este de $1/2$. Să se calculeze lungimile laturilor și apotemelor triunghiului echilateral, pătratului și hexagonului regulat înscrise în acest cerc.

III.1. Fie $P(X) = mX^3 + 2X^2 - 5X + n$, $m, n \in \mathbf{R}$. Să se afle m și n astfel încât restul împărțirii lui $P(X)$ la $X^2 - 3X + 4$ să fie $-5X + 4$.

2. Apotema unei piramide patrulateră regulate face cu planul bazei un unghi de 45° . Știind că această apotemă are lungimea egală cu $6\sqrt{2}$ cm, să se calculeze:

- aria laterală și aria totală a piramidei;
- volumul piramidei;
- se secționează cu un plan paralel cu baza la o distanță egală cu $2/3$ din înălțime față de bază. Să se calculeze aria secțiunii;
- să se calculeze raportul dintre volumul piramidei noi formate și volumul piramidei inițiale;
- să se calculeze în două moduri volumul trunchiului de piramidă obținut.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,75p b) 0,75p 2) 1,25p

II. 1) 0,75p 2) 1,25p

III. 1) 0,75p 2) $1p + 0,5p + 0,5p + 0,5p + 1p$

TEST NR. 65

I. 1. Să se determine numerele $\overline{x2y}$, știind că $\overline{x2y} = 51y - 50x + 20$.

2. Prețurile a patru sortimente de marfă sunt invers proporționale cu $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}; \frac{6}{7}$. Știind că cele patru sortimente costă 1980 lei, aflați prețul fiecărui sortiment.

II. 1. Se dau numerele:

$$a = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 4}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \left| 2 - \sqrt{3} \right| - \left| 1 - \sqrt{2} \right| - \left| 1 - \sqrt{2} \right| - 1$$

Să se calculeze: $a^2 - b^2$.

2. În triunghiul ABC se cunosc: $AB = 5$ cm, $BC = 10$ cm și $m(\angle C) = 30^\circ$. Fie M simetricul lui A față de BC. Arătați că $BM \perp MC$.

III.1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$a) \frac{1}{x-2} \leq \frac{2}{2x-1}; \quad b) \frac{(x^2+5)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)(1-x)}{(x^2+x+1)(x-2)} \leq 0.$$

2. Într-o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea de 16 cm și latura bazei de 24 cm, se face o secțiune cu un plan paralel cu baza la $\frac{3}{4}$ din înălțime față de bază. Să se calculeze:

- sinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei;
- tangenta unghiului format de o muchie cu planul bazei;
- aria laterală a trunchiului de piramidă obținut prin secționarea piramidei inițiale;
- aria secțiunii făcută în trunchiul de piramidă printr-un plan ce trece prin două diagonale paralele ale bazelor.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 0,75p

II. 1) 1,50p 2) 0,75p

III. 1) 2p 2) 0,75p+0,75p+1p+1p

TEST NR. 66

I. 1. Calculați:

a) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

b) $(0,2)^2 - (-5)^{-2} : 0,2(6) + 2^{-2}$

2. Raportul a 2 numere este 0,3 iar diferența lor 35. Să se afle numerele.

3. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

II. 1. Să se arate că $P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 + X + 3) + 1$ e un pătrat perfect.

2. Aflați aria unui triunghi dreptunghic care are suma catetelor 14 cm, iar diferența lor 2 cm.

3. Media aritmetică a 3 numere este 3. Să se determine numerele știind că media aritmetică a celorlalte două este $11\frac{1}{2}$.

III. Fie triunghiul ABC, isoscel $AB = AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm. Pe planul triunghiului se ridică BM perpendicular pe acesta, $BM = 6$ cm.

a) Să se afle aria triunghiului MBA.

- b) Să se afle distanța de la C la planul MBA.
c) Să se afle volumul tetraedrului ABCM.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,50p b) 0,50p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. a) 1p b) 1p c) 1p

TEST NR. 67

- I. 1. Să se determine cel mai mare număr de forma \overline{ab} care îndeplinește condiția: $\overline{ab} = 8a + 2b$.

2. Găsiți x și y numere naturale prime astfel încât: $\frac{x^2 - y^2}{2x^2 - 3y^2} = \frac{24}{23}$.

- II. 1. Arătați că:

a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, (\forall)x, y \in \mathbb{R}_+$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, (\forall)x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Lungimile a două laturi ale unui triunghi sunt de 3 cm și 6 cm. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului dintre ele nu este mai mare de 4 cm.

- III.1. Simplificați fracția: $\frac{(x^2 + x + 1)^2 - 1}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$.

2. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu volumul de 5920 cm³, latura bazei mari egală cu 20 cm, latura bazei mici egală cu 2 cm, se cer:

- a) înălțimea, apotema și muchia laterală a trunchiului de piramidă;
b) aria laterală și aria totală a trunchiului;
c) volumul și aria laterală a piramidei din care provine trunchiul;
d) măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari a trunchiului de piramidă.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 0,75p

II. 1) 1,75p 2) 1p

III. 1) 1p 2) 1p+1p+1p+1p

TEST NR. 68

I. 1. Efectuați:

- a) $2 \cdot [(10 - 3)(85 - 16 \cdot 5) - 2(1 + 100 : 25)] - 5(1 + 90 : 30);$
- b) $10 \cdot (1,64 \cdot 0,5 + 0,0236 : 0,02);$
- c) $15^7 : (3^2)^3 : (5^2 \cdot 5^3).$

2. În timpul unei vacanțe un elev trebuia să rezolve 240 de probleme, dar a rezolvat cu 15% mai multe. Câte probleme a rezolvat elevul ?

II. 1. Să se efectueze:

- a) $\left[(7^{-1} + 7^{-2}) : (3 \cdot 7^{-3}) + 7^{-2} : \left(-\frac{7}{2} \right)^{-3} \right] : \left(\frac{24}{427} \right)^{-1};$
- b) $\left[(-21)^{-1} \right]^2 : 21^{-1} - 21^{-1}.$

2. Să se demonstreze că într-un trapez diferența bazelor este mai mare decât diferența laturilor neparalele.

III.1. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^2 - aX + 3$ la $X - 2$, știind că împărțit la $X - 1$ dă restul 3; $a \in \mathbf{R}$.

2. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) se cunosc $AB=9$ cm, $AC=12$ cm. Fie BP ($P \in AC$) bisectoarea unghiului B. În punctul P se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, $MP=10$ cm. Să se calculeze:

- a) tangenta unghiului dintre planele (MBC) și (ABC);
- b) distanța de la punctul A la planul (MPB);
- c) sinusul unghiului dintre dreapta MB și planul (MPD), unde $PD \perp BC$ ($D \in BC$);
- d) aria și volumul prisme care are ca bază triunghiul PBC și înălțime MP.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,25p+0,25p+0,25p 2) 0,50p

II. 1) 0,50p+0,25p 2) 1p

III. 1) 1p 2) 1p+1p+1p+2p

TEST NR. 69

- I. 1. Să se afle cel mai mic număr natural care împărțit la 12 să dea restul 7, împărțit la 8 să dea restul 3 și împărțit la 18 să dea restul 13.

2. Să se calculeze:
$$\sqrt{\left(2 - \frac{2}{75}\right)\left(13 - \frac{2}{3}\right)} : \frac{37}{75} \cdot \sqrt{\left(3 + 1\frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$$

- II. 1. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia E este un număr întreg:

$$E = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 5|}{x - 2}$$

2. Să se afle aria unui paralelogram care are diagonalele de 10 cm și 16 cm, iar unghiul dintre ele de 30° .
- III.1. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - 2aX^2 + bX + 3$ la $aX + b$, știind că este divizibil cu $(X - 1)(X + 1)$.
2. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC = 8$ cm, $m(\angle A) = 120^\circ$ și $AD \perp BC$ ($D \in BC$). În punctul D se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, $DM = 4$ cm. Să se calculeze:
- distanța de la punctul D la planul (MAC);
 - unghiul dintre dreapta MD și planul (MAC);
 - aria și volumul piramidei MABC.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1,25p 2) 0,75p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 1p+1p+1,50p

TEST NR. 70

- I. 1. Știind că $a = 6$, $b - c = 4$, $d = [2 \cdot 7 \cdot (7^2)^6 + 3 \cdot 7^3 \cdot (7^2)^5] : 7^{12}$. Să se calculeze: a) $ab - ac$; b) $a^2 + ab - ac + d^2$
2. Trei muncitori sapă un șanț în 3 ore. Câți muncitori sapă același șanț într-o jumătate de oră?

II. 1. Arătați că următoarele numere sunt naturale:

$$a = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}}$$

2. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor $AB = 3$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm, $BC = 3\sqrt{3}$ cm. Fie P piciorul înălțimii din A pe latura BC, iar M și N proiecțiile lui P pe laturile AB, respectiv AC. Să se calculeze lungimea segmentului MN.

III.1. Fie $P(X)$ un polinom de grad mai mare ca 2. Știind că împărțit la $X - 1$ dă restul 1, împărțit la $X - 2$ dă restul -1 și împărțit la $X - 3$ dă restul 2, determinați restul împărțirii lui $P(X)$ la $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

2. Un trapez ABCD ($AB \parallel CD$) are $AB = 30$ cm, $DC = 10$ cm, iar laturile neperalele $AD = 12$ cm, $BC = 16$ cm. În punctul B se ridică o perpendiculară pe planul trapezului, $BM = 10$ cm. Să se calculeze:

- distanța de la punctul M la dreapta AD;
- valoarea uneia dintre funcțiile trigonometrice ale unghiului format de dreapta AD cu planul (MBD);
- unghiul dintre planele (MAB) și (MDC);
- aria și volumul piramidei MABCD.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 0,25p

II. 1) 1p 2) 1,25p

III. 1) 1,50p 2) 1p+1p+1p+1,25p

TEST NR. 71

I. 1. Calculați:
$$\left\{ \frac{\left[\left(\frac{16}{125} \right)^5 \cdot (0,4)^8 \right]^3}{\left(\frac{2}{5} \right)^{69}} - 2^{15} + (\sqrt{0,125})^4 \cdot \frac{1}{16} \right\} : \frac{1}{2^{10}} - (-1).$$

2. Sumele depuse la C.E.C. de doi copii sunt în raportul $2/3$. Ce sumă a depus fiecare copil știind că $3/5$ din suma celui de-al doilea mărită cu 30% din suma depusă de primul este cu 156 000 lei mai mică decât suma celor doi copii împreună ?

3. Determinați valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care este definită expresia

$$E(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

II. 1. Rezolvați ecuația $(m+5) \cdot (m-3) \cdot x = m+5$, unde m este un parametru real.

2. Există o funcție liniară al cărei grafic să conțină punctele $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ și $C(0, 2)$?

III.1. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E astfel încât $AD=CE$. Fie M intersecția dreptelor BE și CD . Calculați $m(\angle BMC)$.

2. Într-un cilindru raza bazei este de 4 cm iar înălțimea de 14 cm. Determinați raza unei sfere a cărei arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 1p

TEST NR. 72

I. 1. Calculați: $\sqrt{10 + \sqrt{4 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{4 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$.

2. La o licitație prețul unui obiect a crescut cu 20% apoi cu 1% din noul preț. Astfel obiectul s-a vândut cu 264 000 lei. Care a fost prețul de la care a pornit licitația?

3. x fiind un număr real oarecare, determinați $|-x|$ și $|(2-\sqrt{3})(x-1)|$.

II. 1. Aflați intersecțiile cu axele de coordonate ale funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$, apoi trasați graficul funcției.

2. Rezolvați sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{2}-x)^2}{2} \geq x(0,5x - \sqrt{8}) \\ (x-2)^2 - 1 \geq (x-1)^2 - 5 \end{cases}$$

III.1. Fie ABC un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) înscris într-un cerc. În A și C se duc tangente la cerc și se notează cu T intersecția lor. Demonstrați că $AC^2 = BC \cdot CT$.

2. Planele a două fețe laterale alăturate ale unei piramide patrulatere regulate formează un unghi de 120° . Să se calculeze volumul piramidei dacă latura bazei are lungimea a.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 2p

TEST NR. 73

I. 1. Calculați: a) $\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{28}} + \frac{1}{\sqrt{63}} + \frac{1}{\sqrt{112}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

2. Demonstrați că:

$$(a-3)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+6)^2,$$

oricare ar fi numărul real a.

3. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x + 2} \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

II. 1. Aflați numerele reale pozitive x care satisfac inegalitatea:

$$1988x - 1987 > 1987x - 1988.$$

2. Determinați a, b, c $\in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul:

$$P(X) = 6X^3 - 16X^2 + 26X - 12$$

să se poată scrie sub forma $P(X) = (3X - 2)(aX^2 + bX + c)$.

III.1. Fie un cerc de centru O iar BO o rază perpendiculară pe un diametru. Unim pe B cu un punct A al diametrului și notăm cu P intersecția dintre BA și cerc. Tangenta în P taie prelungirea diametrului în C. Demonstrați că $CA = CP$.

2. Calculați raza sferei circumscrise unui con circular drept cu generatoarea de 50 cm și raza bazei de 30 cm.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,5p b) 0,5p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 2p

III. 1) 2p 2) 1,50p

TEST NR. 74

- I. 1. Ce semn are diferența $2\sqrt{11} - 6$? Dar diferența $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$?
2. Se știe că $x + y = s$ și $xy = p$. Calculați $x^2 + y^2$ și $x^3 + y^3$.
3. Aflați aria unui dreptunghi știind că dacă mărim lungimea de $9/5$ ori și micșorăm lățimea de $1/3$ ori aria suprafeței dreptunghiulare se micșorează cu 120 cm^2 .

II. 1. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases}$$
, unde a și b sunt parametrii

reali oarecare, $a \neq b$, $a \neq -b$.

2. Aflați câtul și restul împărțirii polinomului:

$$P(X) = 6X^5 - 28X^4 + 37X^3 - 16X^2 + 12X + 4$$

la polinomul $Q(X) = 3X^3 - 8X^2 + 4X - 4$.

- III.1. Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este $3/4$ iar lungimea ipotenuzei este de 175 cm . Să se afle lungimile celor două catete și diferența dintre cele două segmente determinate pe ipotenuză de înălțimea ce pleacă din vârful unghiului drept.
2. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 6 și 16 cm . Fața laterală formează cu planul bazei un unghi de 60° . Calculați volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 75

- I. 1. Calculați: $(-1)^{2m} + (-1)^{2n+1} + (-1)^p$, unde m, n, p sunt numere naturale oarecare.
2. Aflați care a fost prețul unei cărți înainte de a se face două reduceri de prețuri știind că prima reducere a fost de 5% , a doua de 15% și că prețul actual este de $12\,920 \text{ lei}$.

3. Demonstrați că oricare ar fi numărul natural $n \neq 1$ fracția $\frac{3n+2}{2n+3}$ nu este număr întreg.
- II. 1. Determinați funcțiile liniare f și g știind că $f(x+1) + 2g(x-1) = 3$ și $2f(x+1) - 2g(x-1) = 3x$, oricare ar fi x real.
2. Fie polinomul $P(X) = X^4 - 3X^2 + 2X + 1$. Calculați $P(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
- III.1. Într-un cerc se înscrie un triunghi oarecare ABC . Perpendiculara dusă din A pe AC taie cercul în M , iar perpendiculara dusă tot din A pe AB taie cercul în N . Demonstrați că dreptele MN și BC sunt paralele.
2. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei a și muchia laterală. Aflați aria laterală și volumul piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 76

- I. 1. Fie a, b, c trei numere reale oarecare. Dacă $a < b$ rezultă că $a \cdot c < b \cdot c$?
2. Demonstrați că numărul $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ este divizibil cu 15, oricare ar fi numărul natural n .
3. Demonstrați că $\frac{3^n}{4^n} < \frac{3^n + 1}{4^n + 1}$ pentru orice număr natural n , nenul.
- II. 1. Fie polinomul $P(X) = X^5 + aX^2 + bX + 1$. Determinați constantele reale a și b astfel încât suma coeficienților polinomului să fie 2 și în plus $P(X)$ să fie divizibil cu polinomul $X + 1$.
2. Demonstrați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $(b^2 + c^2 - a^2) - 4b^2c^2 < 0$.
- III.1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel ($AB \parallel CD$) în care $BC = CD = DA = a$, iar $AB = 2a$. Calculați aria trapezului.
2. Se consideră o piramidă patrulateră în care una din fețele laterale este un triunghi echilateral și planul ei este perpendicular pe planul bazei. Știind că latura bazei are lungimea a să se calculeze lungimile muchiilor laterale, volumul piramidei și unghiurile formate de muchiile laterale cu planul bazei.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1,50p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1p 2) 1,50p

TEST NR. 77

I. 1. Dacă a, b sunt două numere reale oarecare astfel încât $a < b$, atunci $a^2 < b^2$?

2. Demonstrați că dacă între perechile de numere (a, b) și (c, d) există o

proporționalitate directă, atunci are loc egalitatea: $\frac{ab}{cd} = \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2$.

3. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 3, 4 și 5 dă același rest.

II. 1. Se dă ecuația $\frac{2x+1}{x-3} = m$. Să se rezolve și să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluția să fie număr întreg.

2. Aflați suma coeficienților polinomului:

$$P(X) = (5X^4 - 4)^{1986} + (9X^3 - 8)^{1997} + (1 - 2X)^{1998}$$

III.1. Fie ABCD un paralelogram și $N \in (CD)$, $M \in (BC)$. Prin C ducem $CP \parallel AM$ și $CQ \parallel AN$ ($P \in (AD)$, $Q \in (AB)$). Demonstrați că dreptele PM, QN și EF sunt concurente ($\{E\} = CP \cap AN$, $\{F\} = CQ \cap AM$).

2. Se consideră o prismă ABCDA'B'C'D' care are ca bază un pătrat și în care proiecția vârfului A' pe planul bazei este vârful C. Știind că $AB = a$, $AA' = 2a$, se cere să se afle volumul prisme, unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei și unghiurile fețelor laterale.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 78

- I. 1. a) Dacă $x^2 = y^2$ rezultă $x = y$?
b) Dacă $x < 0$, calculați $\sqrt{x^2}$.
2. Dacă scădem dintr-un număr pe rând numerele 2, 4, 8, 16, obținem patru numere care însumate dau dublul numărului respectiv. Aflați acel număr.
3. Determinați parametrul real m astfel încât ecuația $(m-2)x + 3x = m-5$ să nu admită soluții reale.
- II. 1. Determinați funcția liniară $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x+2) = -4x - f(3)$, oricare ar fi x real.
2. Demonstrați că dacă un polinom $P(X)$ este divizibil cu $X - a$ și $X - b$, atunci el este divizibil cu polinomul $(X - a)(X - b)$ (am presupus $a \neq b$).
- III.1. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\angle A = 90^\circ$). D piciorul înălțimii duse din A și E, F proiecțiile punctului D pe catete. Să se demonstreze că $AE^2 + AF^2 = AD^2$.
2. Secțiunea axială a unui con este un triunghi echilateral cu aria $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aflați aria totală și volumul conului.

Barem de corectare:

- I. 1 punct din oficiu
I. 1) a) 0,50p b) 0,50p 2) 1p 3) 1,50p
II. 1) 1,50p 2) 2p
III. 1) 1p 2) 1p

TEST NR. 79

- I. 1. Se se verifice egalitatea:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \cdot \left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

2. Aflați x din egalitatea:

$$12\frac{1}{3} : \left\{ 2\frac{3}{4} : \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{7}{8} \cdot x \right) \right\} \cdot \frac{8}{11} + 1\frac{2}{3} = 5.$$

3. Să se demonstreze că dacă unui număr i se adaugă de 8 ori suma cifrelor sale, se obține un număr divizibil cu 3.

II. 1. Descompuneți în factori polinomul $P(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

2. Rezolvați sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 2(x-3)-1 < 5 \\ \frac{3x}{8}-7 > \frac{x}{12} \end{cases}$$

III.1. Se consideră un patrulater convex cu diagonalele perpendiculare. Fie O punctul lor de intersecție. Arătați că proiecțiile lui O pe laturile patrulaterului sunt vârfurile unui patrulater înscritibil.

2. Într-o piramidă patrulateră regulată se înscrie un cub astfel încât patru vârfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vârfuri în planul bazei. Să se determine volumul cubului dacă latura bazei piramidei este a iar înălțimea piramidei h.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1,50p

II. 1) 1p 2) 1p

III. 1) 2p 2) 1,50p

TEST NR. 30

I. 1. Calculați: $[2^{48} : 2^{18} + (3^4)^5 + 6^{23} : 6^{13}] : [2^{10} \cdot 3^{10} + 2^{17} \cdot 2^{13} + (3^5)^4]$.

2. Rezolvați ecuația $|x - 4| = 5$.

3. Într-o pivniță se află 7 butoaie pline, 7 butoaie umplute până la jumătate și 7 butoaie goale. Împărțiți aceste butoaie în trei grupe egale astfel încât în fiecare grupă să se afle același număr de butoaie și aceeași cantitate de lichid.

II. 1. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases}, \text{ unde } a, b \text{ sunt parametrii reali.}$$

2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Determinați a și b astfel încât $\frac{1}{4}f(x-1) + \frac{3}{4}f(x+2) = f(x+1)$, oricare ar fi x real.

III.1. Să se arate că lungimea tangentei comune a două cercuri tangente exterioare este medie proporțională între diametrele celor două cercuri.

2. O piramidă VABC are muchiile laterale congruente și perpendiculare ($VA = VB = VC$, $VA \perp VB \perp VC \perp VA$). Știind că $VA = VB = VC = a$, determinați aria totală și volumul piramidei.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 2p

II. 1) 1,50p 2) 1p

III. 1) 1p 2) 1,50p

TEST NR. 31

I. 1. O mulțime A are 11 elemente, iar o mulțime B are 10 elemente. Dacă $A \cup B$ are 13 elemente, câte elemente are $A \cap B$?

2. Să se rezolve în \mathbb{Q} ecuațiile:

a)
$$\frac{x}{2+5: (-5)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2}{\frac{3}{4}};$$

b) $mx + 3 = 3x + m.$

II. 1. Să se calculeze media aritmetică, geometrică și armonică a numerelor a și b unde: $a = \sqrt{252} - \sqrt{112} + \sqrt{448}$ și $b = \sqrt{112} + \sqrt{700} - \sqrt{28}$.

2. Lungimile laturilor unui triunghi sunt: $AB = 13$ m, $BC = 21$ m, $CA = 20$ m. Se cer înălțimile triunghiului.

III.1. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x < 5 \\ x-6, & x \geq 5 \end{cases}$$

2. Fie ABCD un dreptunghi cu $BC = 5$ cm, $m(\angle BOC) = 60^\circ$ ($\{O\} = AC \cap BD$). În punctul A se ridică o perpendiculară pe planul dreptunghiului, $AM = 5$ cm. Să se calculeze:

- tangenta unghiului format de planele (MBD) și (ABC);
- unghiul dintre dreapta MA și (MBD);
- distanța de la punctul A la planul (MBC);
- unghiul dintre planele (MAB) și (MDC);
- aria și volumul piramidei MABCD.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,25p 2) 0,50p

II. 1) 0,75p 2) 1p

III. 1) 1,25p 2) 1p+1p+1p+1p+1,25p

TEST NR. 82

- I. 1. Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{3, 6\}$. Să se efectueze: $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$, $A - (B \cap C)$, $C - (A \cup B)$.

2. Numărul 132 se împarte în părți direct proporționale cu numerele $3\frac{1}{2}$,

$2\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{6}$. Care sunt numerele ?

- II. 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3 \cdot \left\{ x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2 \left(x - \frac{x+3}{5} \right) \right] \right\} = 5x - 2;$

b) $\frac{1-\frac{x}{2}}{3} - \frac{2-\frac{x}{4}}{4} + 3x = 23.$

2. Într-un cerc se duce un diametru AB. Fie M un punct al cercului și N proiecția lui pe AB. Se dă: AN = 12 cm, NB = 3 cm. Se cer lungimile segmentului MN și coardelor AM și BM.

- III.1. Efectuați:

- a) $[-2; 4) \cap \mathbf{N}^*$;
- b) $(-2, 3; 5] \cap \mathbf{R}^*$;
- c) $\{-1; 0; 1; 3\} \cap \mathbf{N}$;
- d) $[-3; 7] \setminus (-2; 9]$;
- e) $[-3; 7] \cup (-2; 9]$.

2. Un triunghi echilateral ABC are lungimea liniei mijlocii MN ($M \in AB$, $N \in AC$) egală cu 4 cm. În punctul M se ridică o perpendiculară MD=2cm pe planul triunghiului. Să se calculeze:

- a) distanța de la punctul B la planul (DAC);
- b) unghiul dintre planele (DAC) și (ABC);
- c) unghiul dintre dreapta AC și planul (DAB);
- d) aria și volumul piramidei cu vârful în D și baza MNC.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 0,50p

II. 1) 0,75p+0,5p 2) 0,75p

III. 1) 1,25p 2) 1p+1p+1p+1,25p

TEST NR. 83

I. 1. Calculați:

a) $2^{74} : (2^3 \cdot 2^{70}) + 103 : (2 + 2 \cdot 102);$

b) $\left[\left(\frac{1}{4} - 0,1 : 2 \right) \cdot \frac{5}{13} + 1 : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) \right] \cdot \frac{3}{8}.$

2. Suma a trei puteri consecutive ale numărului 3 este 351. Să se determine aceste numere.

3. La o întrecere sportivă trebuiau să participe un anumit număr de elevi. S-au înscris însă cu 15% mai mulți elevi, ajungându-se la 69 de copii. Câți elevi trebuiau să participe la întrecerea sportivă ?

II. 1. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} 3,9 + 2(0,2x - 1) = 1,5y \\ -21,3 - 3\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{10 + 0,3y - 2x}{x} \end{cases}$$

2. În triunghiul ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) ducem înălțimea AD ($D \in BC$). Să se demonstreze că: a) $AD \cdot AB = AC \cdot BD$; b) $AD \cdot AC = AB \cdot CD$.

III.1. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(2x - 5) = 2x - 3 - f(7)$.

a) Să se determine $f(x)$;

b) Apartine punctul $A(0, 2)$ graficului funcției $f(x)$?

2. Fie ABCD un paralelogram cu $AB = 10$ cm, $m(\angle ABD) = 60^\circ$ și $BD = 16$ cm. În punctul B se ridică o perpendiculară pe planul paralelogramului, $BM = 10$ cm. Să se calculeze:

a) tangenta unghiului dintre planele (MAC) și (ABC);

b) distanța de la punctul A la planul (MBD);

c) unghiul dintre dreapta MC și planul (MAD);

d) aria și volumul piramidei MABCD.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 0,50p 3) 0,50p

II. 1) 1p 2) 1,25p

III. 1) 1p 2) 1p+1p+1p+1,25p

TEST NR. 34

1. Numărul $A = 5^2 - [(42)^2]^p$ este egal cu:
A: 60; B: 24; C: 29.
2. Soluția ecuației $2(x+3) + 4 = 30$ este:
A: 5; B: 12; C: 10.
3. Aria unui triunghi dreptunghic cu catetele 8 cm, 10 cm este:
A: 80 cm^2 ; B: 40 cm^2 ; C: 18 cm^2 .
4. Valoarea fracției $F(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ pentru $x = 1$ este: A: $\frac{2}{5}$; B: $\frac{1}{3}$; C: 0,5.
5. Volumul unui cub cu muchia 10 cm este:
A: 100 cm^3 ; B: 1000 cm^3 ; C: $10\,000 \text{ cm}^3$.
6. Domeniul de existență al expresiei $E(x) = \sqrt{x-4} - 7$ este:
A: $(4, +\infty)$; B: $[4, +\infty)$; C: $(-\infty, 4]$.
7. Se consideră ABCD (dreptunghi) cu $AB = m$, $BC = n$, $m > n$. Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N al lui $[BC]$. Ce relație este între m și n astfel ca $\triangle NDM$ dreptunghic?
A: $m = n\sqrt{2}$; B: $m = 2n$; C: $m = n\sqrt{3}$.
8. Soluția sistemului: $\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ este: A: (2, 2); B: (2, 6); C: (2, 1).
9. Forma cea mai simplă a expresiei:
$$E(x) = \left(\frac{x}{x^2 - x} + \frac{x+2}{2+x-2x^2-x^3} + \frac{3x^2}{6x^2+6x} \right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{0,5}{x} \right)$$
 este:
A: $\frac{x+3}{4}$; B: $\frac{x+3}{2}$; C: $\frac{x+6}{4}$.
10. În con circular drept cu $R = 5 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$ se face o secțiune paralelă cu baza, având aria egală cu 4π . Arătați că A_1 și V trunchiului de con format este:
A: $\frac{273\pi}{3} \text{ cm}^2$, $\frac{468\pi}{3} \text{ cm}^3$; B: $\frac{172\pi}{3} \text{ cm}^2$, $\frac{368\pi}{3} \text{ cm}^3$; C: $\frac{162\pi}{3} \text{ cm}^2$, $\frac{458\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 0,75p; 3: 0,75p; 4: 0,75p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 85

1. Valoarea numărului $8^{16} : (2 \cdot 2^2 \cdot 4^{10})^2 - 2^1 - 2^0$ este:
A: 0; B: 2; C: 1.
2. Fiind date puterile 2^{30} și 8^{10} avem:
A: $2^{30} > 8^{10}$; B: $2^{30} < 8^{10}$; C: $2^{30} = 8^{10}$.
3. Efectuând: $\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} : \frac{5}{9} \cdot 0 \cdot \frac{4}{7}$ obținem: A: 2; B: 3; C: 0.
4. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ atunci valoarea raportului $\frac{2x-y}{x+3y}$ este:
A: $\frac{2}{5}$; B: $\frac{19}{3}$; C: $\frac{3}{19}$.
5. Soluția sistemului de ecuații:
$$\begin{cases} x + y\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ \frac{3x}{\sqrt{2}} - 2y = 1 \end{cases}$$
 este:
A: $(\sqrt{2}, 1)$; B: $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$; C: $(0, 3)$.
6. Efectuați împărțirea: $(x^4 + 3x^2 - 2x + 3) : (x^2 - x + 1)$ și obțineți restul:
A: 3; B: -1; C: 0.
7. Două unghiuri adiacente au laturile necomune în prelungire. Unghiul bisectoarelor lor are măsura:
A: 50° ; B: 100° ; C: 90° .
8. Dacă un dreptunghi are $l = 5$ cm, $L = 5\sqrt{3}$ cm, atunci unghiul diagonalelor este:
A: 30° ; B: 60° ; C: 45° .
9. Dacă $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, atunci card. $A \cup B$ este:
A: 5; B: 3; C: 4.
10. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată $L = 100$ cm, $l = 6$ cm, $h = 2$ cm. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului și a piramidei din care provine.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 1p; 2: 1p; 3: 0,5p; 4: 1p; 5: 0,5p;

6: 0,75p; 7: 0,75p; 8: 1p; 9: 0,5p;

10: 0,5p + 0,5p + 0,5p + 0,5p.

TEST NR. 36

- $\frac{2}{5}$ din 2 m este:
A: 8 cm; B: 8 dm; C: 0,8 m.
- Valoarea expresiei: $(-1) \cdot (-2 + 3) + 4 : (5 - 6^0)$ este:
A: 2; B: -5; C: 0.
- Numărul de elemente ale mulțimii $M = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}^*, -2 \leq x < 5 \}$ este:
A: 7; B: 5; C: 6.
- Valoarea expresiei: $E = 3(x^2 - 1) + x(x - 2) - 4x(x - 1) - 2x + 2$ este:
A: x; B: 2; C: -1.
- Soluția sistemului:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 25 \end{cases}$$
 este:
A: (7, 2); B: (3, 4); C: $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right)$.
- $\frac{3}{x-2} > 0$ pentru:
A: $x < 2$; B: $x = 2$; C: $x > 2$.
- Valoarea polinomului $P(X) = X^4 - 3X^2 + 5X - 7$ pentru $X = -1$ este:
A: 2; B: -4; C: -14.
- Dacă două unghiuri complementare au raportul $\frac{2}{7}$, atunci măsurile lor sunt:
A: 10° și 35° ; B: 40° și 140° ; C: 20° și 70° .
- Dacă un cub are muchia 10 cm, diagonala sa este:
A: 30 cm; B: $10\sqrt{3}$ cm; C: 50 cm.
- Un con are $G = 10$ cm și unghiul dintre ea și planul bazei este 60° . Se cer: înălțimea, volumul, aria totală și unghiul sectorului circular ce provine din desfășurare.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 1p; 2: 1p; 3: 0,75p; 4: 1p, 0,75p; 5: 0,75p;
6: 0,5p; 7: 1p; 8: 0,75p; 9: 1p; 10: 0,5p.

TEST NR. 37

1. Valoarea expresiei $E = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{9} \right) : \frac{4}{3}$ este:
A: 1; B: 10; C: $\frac{35}{36}$.
2. Soluția ecuației $\frac{5}{9} \cdot x = 8$ este:
A: $\frac{1}{2}$; B: $\frac{5}{72}$; C: $\frac{72}{5}$.
3. Valoarea expresiei $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ este:
A: $\sqrt{3}$; B: $\sqrt{2}$; C: $-5\sqrt{2}$.
4. Câte valori naturale ale lui x verifică relația $\frac{2}{3} < \frac{x+2}{5} \leq \frac{2}{7}$?
A: 3; B: 0; C: 2.
5. Sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ este:
A: compatibil determinat; B: incompatibil; C: compatibil nedeterminat.
6. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Funcția este:
A: constantă; B: strict crescătoare; C: strict descrescătoare.
7. Aria triunghiului echilateral înscris în cercul de rază 5 cm, are valoarea:
A: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; B: $\frac{75\sqrt{3}}{2}$; C: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.
8. Dacă în romb o diagonală are lungimea cât lungimea laturii lui, atunci unghiul ascuțit al rombului este:
A: 50° ; B: 60° ; C: 120° .
9. Dacă o piramidă patrulateră regulată are $h = 9$ cm, latura bazei 6 cm, atunci aria totală a ei este:
A: $72\sqrt{10}$; B: $36\sqrt{10}$; C: $36(1 + \sqrt{10})$.

Barem de corectare:

1p din oficiu
1: 1p; 2: 0,5p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 1p;
6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1,5p.

TEST NR. 38

1. Pentru ce valoare a lui x e verificată egalitatea:

$$[20 \cdot (x : 4 - 5) \cdot 5 : 100 - 3] : 11 = 2$$

A: 100; B: 80; C: 120; D: 200.

2. Câte numere de trei cifre împărțite la 12 dau rest 5 ?

A: 73; B: 74; C: 75; D: 76.

3. Un elev are suma de 18 000 lei în număr egal de bancnote de 500 și 1000 lei. Câte bancnote din fiecare fel are elevul ?

A: 31; B: 35; C: 37; D: 40.

4. Numărul $a = (3^{2n} + 3^{2n+1} + 3^{2n+2} + 3^{2n+3}) \cdot 3^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$ este:

A: 11; B: 12; C: 13; D: 14.

5. Dacă un unghi format de o diagonală a unui romb cu o latură a sa are 36° , atunci un unghi al rombului poate fi de:

A: 100° ; B: 90° ; C: 105° ; D: 108° .

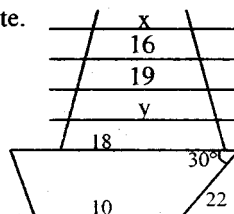
6. În figura alăturată a, b, c, d sunt paralele echidistante.

Măsurile x , y sunt:

A: 14, 21; C: 13, 22; D: 13, 21; E: 14, 20.

7. Trapezul alăturat are aria de:

A: 154; B: 180; C: 156; D: 152.

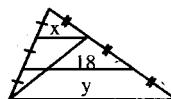


8. Latura AB a $\triangle ABC$ cu $AC = 7$, iar $BC = 10$, poate avea măsura cuprinsă în intervalul:

A: [3, 17); B: (3, 18); C: (4, 16); D: (3, 17).

9. În figura alăturată pereche (x, y) este:

A: (12, 34); B: (14, 36); C: (12, 36); D: (10, 34).



10. Triunghiul echilateral BCD și triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, sunt situate în plane perpendiculare. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ și $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Dacă E mijlocul lui $[BC]$ și $BC = 12$ cm, să se afle:

- Aria $\triangle DMN$;
- $d(E, (DMN))$;
- $\tan \theta$, $\theta = m(\angle (ABC), (DAB))$.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 0,75p; 3: 1p; 4: 0,75p; 5: 0,75p;
6: 0,75p; 7: 0,75p; 8: 0,75p; 9: 1p; 10: 0,75p.

TEST NR. 89

1. Care dintre inegalități este falsă:

A: $2 \cdot 3^{15} > 2^{16}$; B: $(7^4)^5 < 7^{5^2}$; C: $3^{92} > 2^{186}$; D: $5^{94} < 3^{141}$.

2. Dacă primul număr este de 3 ori mai mic decât al doilea, al doilea e de 3 ori mai mic ca suma celorlalte două și cu 5 mai mic decât al treilea, atunci numerele sunt:

A: 47, 15, 20; B: 45, 20, 20; C: 45, 15, 30; D: 45, 15, 20.

3. O masă sub formă de pătrat are perimetrul 48 dm. Dacă 1 m² de melanj constă 6 250 lei, atunci acoperirea părții superioare a mesei a costat:

A: 9 200 lei; B: 9 100 lei; C: 9 000 lei; D: 7 800 lei.

4. După o reducere de 12% și una de 10%, un costum costă 79 200 lei. Care e prețul inițial ?

A: 79 000 lei; B: 82 200 lei; C: 80 200 lei; D: 79 200 lei.

5. Care propoziție este adevărată:

A. Dreapta de ecuație $x = 3$ e paralelă cu axa absciselor.

B. Dreapta de ecuație $y - 2 = 0$ e paralelă cu axa ordonatelor.

C. Dreptele $2x = 3$ și $2y = 3$ sunt paralele.

D. Dreptele $2x - 3y = \frac{1}{2}$ și $4x - 6y = \frac{1}{3}$ sunt paralele.

6. Fie ABCD un pătrat, $\triangle ABE$ echilateral în interiorul lui și $\triangle BCF$ echilateral în exteriorul pătratului. Dacă $AB = 5$ cm, atunci afirmația este falsă:

A. Punctele D, E, F coliniare.

B. Dreptele EB, BF perpendiculare.

C. $EF = 5\sqrt{2}$ cm; D : $EC \leq 2,5$ cm.

7. Fie expresia $E(x) = \frac{4x^2 - 15 + (2x - 3)^2 + 4x}{1 + 4x + 4x^2}$. Următoarea afirmație este greșită:

A: $E(-1) = 10$; B: $E(x) = \frac{2(2x - 3)}{2x + 1}$; C: $E(2) = \frac{1}{5}$; D: $E(-3) = \frac{18}{5}$.

8. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, unde $0 < x < 90^\circ$ și $E = \frac{4\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x}{3\sin x + 2\cos x}$, atunci următoarea afirmație este adevărată:

A: $E < -1$; B: $E > 0$; C: $E = \frac{5}{17}$; D: $E = -\frac{5}{17}$.

9. Dacă ABCDA'B'C'D' cub iar I, J, K mijloacele muchiilor [AB], [AA'], [B'C'], care afirmație este falsă:

- A. $\triangle IJK$ isoscel
 B. $\triangle KBI$ dreptunghic
 C. B, C', D sunt echidistante față de I și J
 D. $\triangle BKA'$ echilateral

10. Pe laturile unui pătrat, în planul acestuia, se construiesc, în exterior, triunghiuri echilaterale cu latura 10 cm. Să se afle:

- a) dacă cele 4 triunghiuri și pătratul pot forma fețele unei piramide;
 b) aria și volumul piramidei obținute.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 1p; 3: 0,75p; 4: 1p; 5: 0,5p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 90

- I. 1. Calculați:

a) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$; b) $1\frac{1}{2} \cdot 0,25$; c) $3^3 : 3^2$; d) $(8 + 2^4 \cdot 2) : 8 - 4$.

2. Este 2 soluție pentru ecuația: $2(3x - 1) : 5 - 1 = (x - 1) \cdot 3 - 2$?

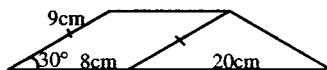
3. În ce tip de triunghiuri două linii mijlocii sunt congruente?

- II. 1. Pot forma numerele 4, 8, 9 și 18 o proporție?

2. Determinați paralelogramul în care diagonalele pot determina cu laturile patru triunghiuri congruente.

3. Desenați un dreptunghi ce se poate împărți în două pătrate. Poate fi el împărțit în trei triunghiuri isoscele?

- III.1. Determinați aria trapezului alăturat:



2. Un triunghi echilateral formează cu un plan un unghi de 60° . Aflați latura lui dacă aria proiecției lui pe plan este $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

3. Un paralelipiped dreptunghic are laturile bazei de 4 cm, 6 cm, iar înălțimea de 5cm. E adevărat că suma tuturor muchiilor este de 60 cm?

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) a) 0,2p b) 0,2p c) 0,2p d) 0,4p

2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 91

- Soluția ecuației $\frac{x+1}{2} - \frac{3x+1}{5} - 4 = x - 15$ este:
A: 1; B: $\frac{113}{11}$; C: -2.
- Dacă $p = 3 + 2\sqrt{2}$, $q = 3 - 2\sqrt{2}$, media geometrică este:
A: 2; B: 1; C: 12.
- Valoarea expresiei $0,03 \cdot 10^{-2} + \sqrt{500} - \frac{50}{\sqrt{5}}$ este:
A: 3; B: 1; C: 0,5.
- Dacă latura unui triunghi echilateral este 12, atunci aria lui este:
A: $36\sqrt{3}$; B: $12\sqrt{3}$; C: $108\sqrt{2}$.
- Dacă lungimea unui cerc este 24π , aria sa este:
A: 96π ; B: 144π ; C: 48π .
- Laturile unui triunghi sunt 6, 8, 12. Un triunghi asemenea cu el are perimetrul 78. Laturile lui sunt:
A: 18, 24, 36; B: 18, 36, 40; C: 10, 16, 36.
- Lungimea unui dreptunghi e de 3 ori mai mare ca lățimea. Dacă aria lui e 27 cm^2 , atunci perimetrul va fi:
A: 14; B: 24; C: 40.
- O funcție liniară care satisface relația $2f(3) + x = f(3 - x)$, are valoarea $f(3)$ egală cu:
A: -2; B: -1; C: 0; D: 1; E: 2.
- Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 < 8\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x \leq 10\}$.
Atunci $A \cap B$ este:
A: $\{0, 1, 2\}$; B: $\{1, 2\}$; C: $\{2\}$.

10. Se consideră \overline{ABCD} , $\overline{A'B'C'D'}$ situate în plane diferite, paralelograme. Fie M, N, P, Q mijloacele lui $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. Demonstrați că MNPQ paralelogram.

Barem de corectare: 1p din oficiu
1: 0,5p; 2: 0,5p; 3: 0,75p; 4: 0,5p; 5: 0,5p;
6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 2,25p.

TEST NR. 92

1. Efectuând calculele: $\frac{1}{2} : 2 + 1 : \frac{1}{2} - 4 : 4^{-1}$ obținem:

A: -55; B: $-\frac{55}{4}$; C: $\frac{1}{4}$.

2. Efectuați: $3\sqrt{12} - \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \sqrt{49} - \sqrt{27}$. Obținem:

A: 8; B: $3\sqrt{3}$; C: $2\sqrt{3} + 8$.

3. Media aritmetică a numerelor $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ este:

A: $\frac{1}{3}$; B: $\frac{2}{3}$; C: 1.

4. Graficul lui $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$ conține punctul A(a, 7). Atunci a este:

A: 2; B: 3; C: 4.

5. Opt robinete cu același debit pot umple un bazin în 6 ore. În câte ore îl umplu 3 robinete ?

A: 16 ore; B: $2\frac{1}{4}$ ore; C: 3 ore.

6. Fie $P(X) = 5X^4 + 3X^3 - X^2 - 7X + 2$. Restul împărțirii la $X + 3$ este:

A: 1; B: 338; C: 100.

7. Aria triunghiului echilateral înscris în cercul de rază $R = 2\text{cm}$ este:

A: $3\sqrt{3}$; B: $4\sqrt{3}$; C: 6.

8. Măsurile unghiurilor ΔABC sunt proporționale cu 2,3,7. Atunci ele pot fi:

A: 30° , 60° , 90° ; B: 30° , 45° , 105° ; C: 30° , 50° , 100° .

9. Volumul tetraedrului regulat cu latura 2 cm este:

A: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; B: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; C: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

10. Volumul unui con circular drept a cărui secțiune e triunghi cu laturile congruente 5 cm, iar a 3-a latură 8 cm, este:

A: 16π ; B: 20π ; C: 3π .

Barem de corectare: 1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 0,75p; 5: 1p;

6: 0,75p; 7: 0,75p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 93

1. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Câte submulțimi ale ei au suma elementelor nulă?

A: 3; B: 5; C: 1.

2. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $9^{3n} \cdot 3^{4n}$ admite una singură dintre valorile:

A: 3^{10n} ; B: 27^n ; C: 3^{12n} .

3. Raportul dintre prețul unui caiet și al unei cărți este $\frac{2}{5}$, iar dublul prețului cărții plus triplul prețului caietului este 6 400 lei. Prețul cărții și al caietului este:

A: 2 400, 600; B: 1 200, 500; C: 2 000, 800.

4. Două cercuri se taie în A și B. Dacă BD și BC diametre, ce măsură are $\angle CAD$?

A: 120° ; B: 90° ; C: 180° .

5. Se dau A, B, C, D oricare trei necoliniare. Paralela prin A la BC taie BD în M, paralela prin B la AD taie AC în N. Poziția dreptelor MN și DC este:

A: perpendiculare; B: paralele; C: altă situație.

6. Fie ABCD pătrat cu O centrul său, iar M, N simetricele lui A față de B și lui D față de A. Triunghiul MON este:

A: dreptunghic; B: dreptunghic isoscel; C: echilateral.

7. Dacă $\frac{x}{y} = 0,4$, atunci $\frac{5x - 2y}{3x - 7y}$ este:

A: 5; B: 2; C: 0.

8. Soluția sistemului:
$$\begin{cases} \frac{7-x}{2} + 4 < \frac{3+4x}{5} + 3 \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x) \end{cases}$$
 este:

A: $(9, \infty)$; B: $[9, \infty)$; C: $(-\infty, 9)$.

9. Fie $F(x) = \frac{x^4 - 25x^2 + 60x - 36}{x^2 - 3x + 2}$. Nu e definită pentru:
 A: $\{-1, -2\}$; B: $\{-1, 2\}$; C: $\{1, 2\}$.
10. Se dă un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $L = 12$, $l = 6$ și $V = 63\sqrt{3}$. Se cer:
 a) înălțimea și apotema
 b) aria laterală A_l
 c) volumul piramidei din care provine

Barem de corectare: 1p din oficiu
 1: 0,5p; 2: 0,5p; 3: 1p; 4: 0,5p; 5: 1p;
 6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1,5p.

TEST NR. 94

- Coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x + 2$ sunt:
 A: (5, 6); B: (5, 2); C: (-5, 3); D: (5, 7); E: (7, 5).
- Soluția ecuației $3(2x - 1) - 5(x - 3) + 6(3x - 4) = 83$ este:
 A: -1; B: 5; C: 1/2.
- În $\triangle ABC$ oarecare, $AB = 10\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. Aria $\triangle ABC$ este:
 A: 152 cm^2 ; B: 96 cm^2 ; C: $40\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
- Măsurile a două unghiuri suplementare sunt în raportul $2/3$. Măsurile sunt:
 A: $120^\circ, 60^\circ$; B: $108^\circ, 72^\circ$; C: $100^\circ, 80^\circ$.
- Catetele unui triunghi dreptunghic sunt $10\sqrt{3}$ și 24. Latura unui triunghi echilateral echivalent cu el este:
 A: 26; B: $15\sqrt{3}$; C: $4\sqrt{30}$.
- Știind că $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{5} = \frac{5c}{4}$ și $a + b + c = 119$ arătați că a, b, c sunt:
 A: (45, 50, 24); B: (12, 16, 40); C: (19, 39, 50).

7. Soluția sistemului
$$\begin{cases} \frac{9x}{2} - \frac{5y}{3} = 13 \\ \frac{5x}{2} + \frac{2y}{3} = 12 \end{cases}$$
 este:

A: (4, 5); B: (4, 3); C: (3, 4).

8. Se consideră inecuația $0 > \frac{3x+2}{18}$. Soluția ei este:

A: (2, ∞); B: ($-\infty$, -2/3); C: [1, ∞).

9. Dintr-o cantitate de bumbac se obțin 24% fibre. Cât bumbac e necesar pentru a obține 240 kg fibre ?

A: 2 316 kg; B: 108 kg; C: 1000 kg.

10. Fie $\triangle ABC$ echilateral. Pe $[AB]$ și $[AC]$ se iau E și F astfel ca $AE = 2 \cdot BE$ și $CF = 2 \cdot AF$. Dreptele BF și CE se intersectează în D. Pe perpendiculara în A pe (ABC) se ia M astfel încât $AM = MB = 30$. Se cere:

- să se arate că $(EFM) \perp (FAM)$;
- să se calculeze $d(M, EF)$, $d(M, CE)$.

Barem de corectare: 1p din oficiu

1: 1p; 2: 0,5p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 0,75p; 8: 0,25p; 9: 0,75p; 10: 1,75p.

TEST NR. 95

I. 1. Calculați: $\left(17\frac{1}{2} - 8\frac{1}{4} \cdot \frac{10}{11}\right) : 1\frac{2}{3}$.

2. Să se calculeze $\sqrt{13}$ cu două zecimale exacte și să se facă proba.

3. Să se împartă nr. 1 în părți invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$; 0, (3); 4.

II. 1. Rezolvați sistemul de inecuații
$$\begin{cases} -2x+1 > 7 \\ 2x-5 \geq -1 \end{cases}$$

2. Determinați funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ al cărei grafic conține A(2, -5), B(5, 2).

3. Să se aducă la forma cea mai simplă:

$$F(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}\right)$$

III.1. Într-un triunghi ABC ($AB = AC = 10$ cm) și $m(\angle A) = 120^\circ$. Să se afle înălțimea corespunzătoare laturii AC.

2. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara MD astfel ca $MA = 15\sqrt{2}$ cm, $MB = 5\sqrt{34}$ cm și $MC = 25$ cm. Să se afle laturile lui și distanța de la diagonala AC la punctul M.

3. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral a cărui latură este de 8 cm. Să se calculeze aria totală și volumul conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 96

I. Calculați:

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{0,125}\right)^{-1}$$

$$2) \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\left(3\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)^2}{4}$$

$$3) \frac{a}{b} \text{ știind că } \frac{3a-2b}{a-b} = \frac{3}{2}.$$

II. 1. Rezolvați în \mathbf{R} :

$$a) 2(x+1) = 3x+1$$

$$b) \frac{x-1}{3} < 7 + \frac{x+1}{5}$$

2. Determinați $a, b \in \mathbf{R}$ dacă $P(X) = aX^3 + 3X^2 - bX$ este divizibil cu $X-1$ și cu $X+2$.

$$3. \text{ Se dă expresia } E(x) = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

a) Aflați mulțimea de existență a expresiei

b) Scrieți $E(x)$ ca fracție ireductibilă.

III.1. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic cu o catetă de 8 cm și ipotenuza 10 cm.

2. Aria paralelogramului ABCD este 30 cm^2 , $BC = 5$. Aflați distanța de la B la AD.

3. Într-o piramidă patrulateră regulată apotema bazei este 6 cm, iar apotema piramidei este 10 cm. Calculați:

- a) muchia laterală
- b) aria laterală, aria totală și volumul
- c) unghiul dintre planul bazei și o față laterală

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- | | | |
|------------------|---------|-------------------|
| I. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |
| II. 1) 0,5p+0,5p | 2) 1p | 3) 0,25p+0,75p |
| III. 1) 1p | 2) 0,5p | 3) 0,5p+0,5p+0,5p |

TEST NR. 97

I. 1. Calculați:

a) $6^5 : (-6)^4 - (-3)^2 + 1^0 + (-3) \cdot (+2)$

b) $\sqrt{63} - 7\sqrt{3} + \sqrt{147} - \frac{7}{\sqrt{7}}$

c) $\frac{1}{8} + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{18} \right) : \frac{11}{6}$

2. Arătați că:

$$(a-3)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+6)^2$$

3. Se dă $\frac{a}{b} = 0,8$. Să se calculeze $\frac{2a+3b}{3b}$.

II. 1. Rezolvați în R:

a) $2x - 5 = x - \frac{1}{2}$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = -11 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{15}y = 3 \end{cases}$$

2. 7 muncitori termină o lucrare în 18 zile. În câte zile termină lucrarea 9 muncitori ?

3. Calculați aria $\triangle ABC$ care are $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ și $BC = 13\text{cm}$.

- III.1.** Reprezentați în același sistem de coordonate graficele funcțiilor $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 2$ și $g(x) = -2x + 1$.
2. Un triunghi ABC are BC conținută în α . Dacă $A \notin \alpha$ și $M \in AB, N \in AC$, stabiliți poziția dreptei MN față de α dacă:
- $AM = 5\text{cm}, AN = 10\text{cm}, BM = 3\text{cm}, NC = 6\text{cm}$
 - $AM = 12\text{cm}, AN = 4\text{cm}, BM = 15\text{cm}, NC = 8\text{cm}$

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,5p+0,5p+0,5p 2) 0,75p 3) 0,75p

II. 1) 0,25p+0,75p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1,50p 2) 0,75p+0,75p

TEST NR. 98

I. 1. Efectuați: $\frac{18}{5} \cdot [0, (6) + 0, (6)]$.

2. Suma a două numere naturale consecutive este 11. Aflați numerele.

3. Se dau $A = \{-2, 0, 2\}, B = \{-3, 0, 3\}$. Calculați $A \cup B, A \cap B, A - B, B \setminus A$.

II. 1. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} 3y + x = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

2. Aflați câtul și restul împărțirii polinomului:

$$P(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 \text{ la } X + 1.$$

3. Simplificați fracția: $\frac{4x + 4}{12x + 12}$.

III.1. Aflați aria și perimetrul unui triunghi echilateral de latură 12cm.

2. Fie un cub de muchie 10cm. Aflați diagonala, aria și volumul său.

3. Aria laterală a unui con circular drept este de $544\pi \text{ cm}^2$ iar $G = 34\text{cm}$.

Să se afle:

a) aria și volumul conului

b) volumul trunchiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza dus prin mijlocul înălțimii conului.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 0,5p+0,5p

TEST NR. 99

I. 1. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid -1 < \frac{4x+10}{2} < 13 \right\} \text{ și } B = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid 3 < \frac{2x+14}{2} < 10 \right\}$$

Se cer $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

2. Să se afle x din: $\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{4\sqrt{8}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{20}}{5}$.

3. Trasați graficul funcției $f: (1, 5) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 3$.

II. 1. Să se afle soluția $x \in \mathbf{Z}$ a sistemului:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{3} \geq 0 \\ (x-1)(x+1) \leq (x-1)^2 \end{cases}$$

2. Un romb ABCD are $AB = 4\text{cm}$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. În D se ridică o perpendiculară pe plan astfel ca $MD = 4\text{cm}$. Fie P mijlocul lui MD și Q mijlocul lui MB. Se cere:

- distanța de la M la dreapta BC
- distanța de la M la dreapta AC
- unghiul format de (APQ) și (ABC)

3. Să se afle $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $x^2 = a$ unde:

$$a = 8,4 : 0,8 + 3 \cdot \left(3\frac{1}{2} - 1,25 \cdot 2 \right) - \left(\sqrt{5} - \frac{2,5}{\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{5} - 2$$

III.1. Se cer înălțimea și aria $\triangle ABC$ echilateral cu $AB = 10$.

2. Un unghi este egal cu $2/3$ din complementul său. Se cer unghiurile.

3. Aflați raportul dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor 144 și 720.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 0,50p

II. 1) 0,50p 2) 0,75p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 0,50p 3) 0,75p

TEST NR. 100

- I. 1. Calculați $[(5 \cdot 36 + 5 \cdot 44) : 5 + (12 \cdot 81 + 19 \cdot 12) : 100] : 92$
2. Un număr este de 12,56 ori mai mic ca altul. Să se afle numerele știind că suma lor este 1356.
3. Să se rezolve și să se discute ecuația în raport cu parametrul $m \in \mathbb{R}$:
$$m^2x - 1 = 3mx + 4x$$
- II. 1. Într-un $\triangle ABC$, bisectoarele unghiurilor formate de mediana $[AM]$ cu latura $[BC]$, intersectează celelalte două laturi în P și Q . Demonstrați că $PQ \parallel BC$.
2. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(5 - 2x) = 4x + a$ și apoi trasați graficul funcției dacă el trece prin $M(3, 3)$.
3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, cu $AB = AC = AD = BC = CD = BD$. Pe segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[AD]$ se consideră M, N, P, Q astfel ca $AM = BN = CP = DQ$. Dacă punctul O este mijlocul lui $[NQ]$ să se arate că $NQ \perp (MOP)$.
- III.1. Să se calculeze media aritmetică și geometrică a numerelor $p = (2 - \sqrt{3})^2$ și $q = (2 + \sqrt{3})^2$.
2. Să se determine raportul dintre aria unui pătrat de latură a și aria pătratului ce are diagonala celui inițial ca latură.
3. Să se calculeze aria unui trapez în care linia mijlocie este 12 cm și înălțimea 6 cm.

Barem de corectare:

1 punct din oficiu

I. 1) 0,75p 2) 0,75p 3) 0,75p

II. 1) 1,25p 2) 1,25p 3) 1,25p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 101

1. Dacă $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x-4$, soluția ecuației este:
A: $-1/2$; B: 7; C: 1.
2. Dacă $m = 17 + 12\sqrt{2}$, $n = 17 - 12\sqrt{2}$, media geometrică a numerelor este:
A: 12; B: $1/5$; C: 1.

3. Dacă $x = 0,03 : 10^{-2} + \sqrt{500} - \frac{50}{\sqrt{5}}$, $y = 2^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0,5$, $(x + y)^2$ este:

A: $\frac{1}{4}$; B: $\frac{13}{2}$; C: $\frac{81}{4}$.

4. În $\triangle ABC$ ascuțitunghic, AD înălțime și $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$. Dacă paralela prin C la AB intersectează AD în E . Atunci paralela prin E la AC trece prin:

A: mijlocul lui B ; B: $N \in (BC)$ unde $CN = \frac{1}{4}BC$;

C: $P \in (BC)$ astfel încât $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{5}$.

5. Pe planul $\triangle ABC$ echilateral se ridică DA perpendiculară $DA = 12$. Se duce $CE \perp AB$, $E \in (AB)$ și $EF \perp DB$, $F \in (DB)$. Dacă $AB = 12$, atunci aria $\triangle CEF$ este:

A: $9\sqrt{6}$; B: $9\sqrt{3}$; C: $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

6. Graficul lui $f: [-2, 2] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x - 5$ este:

A: mulțime finită de puncte; B: semidreaptă;

C: o reuniune de segmente.

7. Fie $ABCD$ dreptunghi ($AB = 10$, $BC = 8$) și $OA \perp (ABC)$ cu $OA = 6$. Se notează cu E mijlocul lui OC . Atunci distanța de la O la (ABE) este:

A: $\frac{39}{5}$; B: 15; C: $\frac{24}{5}$.

8. O mulțime X are 10 elemente, Y are 8 elemente. Dacă $X \cup Y$ are 12 elemente, atunci $X \cap Y$ are:

A: 10 elemente; B: 6 elemente; C: 8 elemente.

9. Cel mai mare divizor comun al numerelor 1450, 144, 6006 este:

A: 2; B: 15; C: 6.

10. Bisectoarea suplementului unghiului de 45° determină cu laturile acestuia unghiuri de:

A: 105° ; B: $10^\circ 3'$; C: $67^\circ 30'$.

Barem de corectare: 1p din oficiu

1: 1p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 0,5p; 10: 1,5p.

TEST NR. 102

1. Dacă $m = 0,4$ și $n = 2,5$ atunci media lor aritmetică este:
A: $1\frac{9}{20}$; B: $\frac{2}{5}$; C: $\frac{2}{29}$.
2. Soluția ecuației $7\left(2x - \frac{2}{3}\right) - 2(3x - 3,5) = 9$ este:
A: 2; B: $\frac{5}{6}$; C: 4,2.
3. Aflați valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ dacă $M(2, 3 - m) \in G_f$ unde $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (m - 1)x - m + 3$. A: -2; B: -1; C: 0; D: 1.
4. Dacă ipotenuza unui triunghi dreptunghic este 13 și una dintre catete de 5 cm, atunci proiecția celeilalte catete pe ipotenuză este:
A: 8 cm; B: $\frac{144}{13}$ cm; C: 7,5 cm.
5. Fie ABCD dreptunghi ($AB = 8$, $BC = 6$) și $MC \perp (ABC)$, $MC = \frac{24}{5}$.
Distanța de la M la BD este: A: 10; B: $\frac{24\sqrt{2}}{5}$; C: 8,5.
6. Fie ABCD romb, $A' \notin (ABC)$. Dacă unghiurile formate de AA' cu AD și AB sunt congruente și $A'P \perp (ABC)$, atunci punctele A, P, C sunt:
A: coliniare; B: necoliniare.
7. Soluția sistemului:
$$\begin{cases} (x+1)(y-1) = (x+5)(y-5) \\ (x+2)(y+3) = (x+4)(y-1) \end{cases}$$
 este:
A: (3, 2); B: (-4, 2); C: (-1, 0).
8. Comparați $m = 9^{17}$ și $n = 27^{11}$. Atunci:
A: $m = n$; B: $m > n$; C: $m < n$.
9. Dacă unghiurile unui triunghi sunt proporționale cu 4, 5, 9, el este:
A: echilateral; B: isoscel; C: dreptunghic.
10. O mulțime A are 12 elemente, alta B are 10 elemente iar $A \cap B$ are 5 elemente. Atunci $A \cup B$ are: A: 13; B: 15; C: 22.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,5p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 0,5p.

TEST NR. 103

1. Produsul tuturor numerelor întregi cuprinse între -100 și $+100$ este:
A: un număr foarte mare ce nu se poate calcula; B: 0; C: 129 560.
2. $\sqrt{2}$ cu aproximație de o miime este:
A: 1,414; B: 1,420; C: 1,415.
3. Descompunerea în factori a polinomului $x^2 + 2xy + y^2 - 4$ este:
A: $(x + y - 2)(x + y + 2)$; B: $(x + y - 2)^2$; C: $(x + y - 4)(x + y + 1)$.
4. Cel mai mic număr natural nenul, care împărțit la 2, 3, 5 dă același rest diferit de zero este:
A: 30; B: 31; C: 61.
5. Graficul funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$ intersectează axa Ox în punctul de abscisă:
A: -3 ; B: $-\frac{3}{2}$; C: $\frac{3}{2}$.
6. Dacă $\frac{2a+3b}{5a+2b} = \frac{3}{4}$ atunci $\frac{a}{b}$ este:
A: $\frac{1}{7}$; B: $\frac{7}{6}$; C: $\frac{6}{7}$.
7. Dacă un con circular drept are $V = 100\pi \text{ cm}^3$ și $h = 12 \text{ cm}$ atunci aria totală este:
A: 90π ; B: 95π ; C: 65π .
8. Aria triunghiului cu laturile $2\sqrt{3} \text{ cm}$, 2 cm și 4 cm este:
A: 4; B: $2\sqrt{3}$; C: $4\sqrt{3}$.
9. Patrulaterul care are vârfurile în mijloacele laturilor unui romb este:
A: dreptunghi; B: pătrat; C: paralelogram.
10. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 10 \text{ cm}$. Calculați:
a) aria totală și volumul cubului
b) aria și volumul piramidei $B'A'BC'$
c) una din funcțiile trigonometrice al unghiului format de BB' cu planul $A'BC'$.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 0,75p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 0,5p;

6: 1p; 7: 0,75p; 8: 0,75p; 9: 0,5p;

10: a) 0,5p; b) 1p; c) 0,5p.

TEST NR. 104

1. Efectuând calculele: $-10 + 10 : (-2) - \sqrt{1024}$ obținem:
A: -32; B: 0; C: 47.
2. În intervalul $(-4, 2]$ se găsesc:
A: 6 numere întregi; B: o infinitate de numere întregi;
C: 5 numere întregi.
3. Ecuația $X \cap \{5, 7, 8\} = \{5, 7\}$ are:
A: o singură soluție; B: două soluții; C: o infinitate de soluții.
4. $\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2}$ este:
A: $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; B: $\sqrt{5} - \sqrt{7}$; C: $\sqrt{2}$.
5. Într-un triunghi dreptunghic cateta care se opune unghiului de 30° este:
A: jumătate din ipotenuză; B: un sfert din ipotenuză;
C: congruentă cu cealaltă catetă.
6. Aria triunghiului echilateral cu latura de lungime 3 cm este:
A: $9\sqrt{3}$; B: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; C: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.
7. Sistemul $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ are soluția:
A: (2, 4); B: (2, 3); C: (3, 2).
8. Restul împărțirii polinomului $P(X) = 2X^2\sqrt{3} + X - 7$ la $X - 1$ este:
A: $2\sqrt{3}$; B: $2\sqrt{3} - 7$; C: $2\sqrt{3} - 6$.
9. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ atunci $\text{card}(A \times B)$ este:
A: 15; B: 3; C: 4.
10. Fie VABC piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 6\text{cm}$, $VA = 5\text{cm}$.
Calculați:
 - a) aria totală și volumul piramidei
 - b) aria ΔVAM unde M e mijlocul lui BC
 - c) o funcție trigonometrică a unghiului dintre muchia laterală și planul bazei.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 0,5p; 2: 0,5p; 3: 0,75p; 4: 0,75p; 5: 0,5p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p;

10: a) 1p; b) 0,5p; c) 0,5p.

TEST NR. 105

I. 1. Calculați: $\left(-1\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^{98} : \frac{1}{5^{29}}$.

2. Să se împartă nr. 180 în trei părți astfel: al doilea număr să fie jumătate din primul și $\frac{2}{3}$ din al treilea.

3. Să se raționalizeze: $\frac{1}{\sqrt{2}-3}; \frac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{19}}$.

II. 1. Se dă fracția: $F(x) = \frac{4x^3 - 32}{x^3 + (x+2)^3}$:

a) Arătați că: $F(x) = 2 - \frac{6}{x+1}$;

b) Pentru ce valori reale x , $F(x)$ este definită;

c) Pentru ce valori întregi ale lui x , $F(x)$ este întreg.

2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dată de $f(x) = ax + b$, al cărui grafic trece prin punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 1)$. Să se determine forma funcției și să se reprezinte grafic.

III.1. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ se cunosc catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Să se calculeze înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, aria triunghiului și raza cercului circumscris.

2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonala de 9 m, iar laturile bazelor de 7 m și 5 m. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul trunchiului.

Barem de corectare: 1p din oficiu

I. 1) 1p

2) 1p

3) 1p

II. 1) a) 1p; b) 0,50p; c) 0,40p

2) 1p

III. 1) 1,50p

2) 1,50p

TEST NR. 106

I. 1. Calculați: a) $\left(\frac{1}{324} - \frac{7}{150} - \frac{17}{240}\right) \cdot \left(0,5 - \frac{1}{2}\right)$; b) $(-0,1)^3 \cdot (-1,2)^2 \cdot (-10)^6$.

2. Să se determine numerele x, y, z , știind că:

$$x - y = \frac{y+z}{4} = \frac{z}{3} \text{ și } x + 2z = 24$$

3. Fie numerele $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Să se calculeze media aritmetică, media geometrică și media armonică.

II. 1. Se consideră numărul $a = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

a) Arătați că $a^2 \in \mathbb{Q}$;

b) Pentru ce valori ale parametrului m , polinomul:

$$P(X) = 16X^4 + 8X^2 + m \text{ se divide cu } X - m.$$

2. Fie ABCD un paralelogram. Se consideră M, N, P, Q respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Dreptele AN, BP, CQ, DM determină un paralelogram. Care este raportul dintre aria acestui paralelogram și a celui inițial?

III.1. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, cu catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ m se ridică perpendiculara $AM = 24$ m. Calculați distanța de la M la BC și măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de planele ABC și MBC.

2. Într-un con circular drept cu diametrul bazei de $12\sqrt{2}$ cm și înălțimea egală cu 6 cm se înscrie un cub, astfel încât o bază a sa să se găsească în planul conului, iar vârfurile celeilalte baze să fie situate pe pânza conică:

a) Să se calculeze aria laterală și volumul conului

b) Să se calculeze volumul cubului

Barem de corectare: 1p din oficiu

I. 1) a) 0,50p; b) 0,50p; 2) 1p 3) 1p

II. 1) a) 0,75p; b) 0,75p; c) 0,40p 2) 1,50p

III. 1) 1,50p 2) 1,50p

TEST NR. 107

$$1. \text{ Fie } a = \frac{8 - 4,7 : \left(5 - 0,8 : 2 \frac{4}{6} \right) + \frac{4}{5} \cdot 1,25}{\left(5 \frac{3}{9} - 3 \frac{3}{4} \right) : 1 \frac{7}{12} + 2} \cdot \frac{3}{8}. \text{ Să se precizeze dacă:}$$

A: $a < 1$; B: $a = 1$; C: $a > 2$.

2. Să se afle $\text{card}(X \cup Y)$ dacă:

$$X = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{2n+3} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } Y = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{n+3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Rezultatul este:

A: 9; B: 8; C: 4.

3. Media aritmetică a numerelor $E_1 = 5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 7\sqrt{54} - 2\sqrt{244} + 3$ și

$$E_2 = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - |3-\sqrt{5}| - 2\sqrt{5} + 6 \text{ este:}$$

A: 2, 5; B: 4; C: 2.

4. Dacă $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, valoarea raportului $\frac{6x-4y+3z}{3x-2y+z}$ este:

A: $\frac{3}{2}$; B: 8; C: 3.

5. Soluția ecuației $2(x-1) = \frac{7x-3}{2}$ este:

A: $\frac{1}{3}$; B: $-\frac{1}{3}$; C: 3.

6. Ce termen se adaugă expresiei $x^2 + \frac{1}{25}$ pentru a obține pătratul unui binom ?

A: $\frac{2x}{5}$; B: $\frac{x^2}{5}$; C: $\frac{1}{5}$.

7. Lungimile laturilor unui triunghi sunt: 10, 24, 26 cm. Aria sa este:

A: 1224 cm^2 ; B: 181 cm^2 ; C: 1500 cm^2 .

8. Un unghi este cu 28° mai mic decât complementul său. Ce măsuri au ?

A: $30^\circ, 60^\circ$; B: $31^\circ, 59^\circ$; C: $28^\circ, 62^\circ$.

9. Într-un triunghi echilateral cu latura 10 cm, înălțimea corespunzătoare unei laturi este:

A: 5 cm; B: $3\sqrt{5}$ cm; C: $5\sqrt{3}$ cm.

10. Un corp are forma unui cilindru lung de 40 cm, continuat cu două emisfere la capete, de aceeași rază ca și cilindrul. Dacă $R = 30$ cm, aria totală este:

A: $6000\pi \text{ cm}^2$; B: $5400\pi \text{ cm}^2$; C: $600\pi \text{ cm}^2$.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 1p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 0,75p;

6: 0,75p; 7: 0,75p; 8: 0,75p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 108

1. Calculați: $\left\{ \left[0,2 + 0, (2) \right] \cdot \frac{9}{19} + \frac{4}{5} \right\}^3 + 1$. Rezultatul corect este:

A: $\frac{1}{19}$; B: 2; C: 9.

2. Calculați:

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{17})^2} - \sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$$

Obținem: A: $2-\sqrt{2}$; B: $2-\sqrt{3}$; C: 2.

3. Sistemul: $\begin{cases} 5(3x+y) - 8(x-6y) = 200 \\ 200(2x-3y) - 13(x-y) = 520 \end{cases}$ are soluția:

A: (20, 3); B: (7, 2/3); C: (21, 1).

4. Din 20 kg struguri se obțin 12l vin. Cât vin se obține din 5100 kg struguri?

A: 3 000 l; B: 3 060 l; C: 3 100 l.

5. Dacă $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - nX + 4$, $n \in \mathbf{R}$ este divizibil cu $X + 1$, atunci n este:

A: -8; B: 8; C: 10.

6. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (m-1)x + 5$. Știind că graficul ei trece prin $A(1, 3)$, atunci m este:

A: -2; B: -1; C: 2.

7. Un trapez isoscel are bazele 12 și 6 cm, unghiul ascuțit de 60° . Perimetrul său este:

A: 32; B: 24; C: 30.

8. Triunghiul ABC are aria 168 cm^2 . Dacă AM este mediană, aria $\triangle AMB$ este:

A: 42 cm^2 ; B: 84 cm^2 ; C: 112 cm^2 .

9. Aria totală a unui cilindru circular drept este $132\pi \text{ cm}^2$, iar aria laterală $96\pi \text{ cm}^2$. Volumul ei este:

A: $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$; B: $132\pi \text{ cm}^3$; C: $144\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

10. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 12, 10 și 6 cm este:

A: $2\sqrt{70}$; B: 28; C: $4\sqrt{7}$.

Barem de corectare:

1p din oficiu

1: 1p; 2: 0,75p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 1p;

6: 0,75p; 7: 1p; 8: 0,75p; 9: 1p; 10: 0,75p.

TEST NR. 109

1. Dacă $A-B$ are 5 elemente, $B-A$ are 7 elemente și $A \cup B$ are 14 elemente, câte elemente are $A \cap B$?
A: 5; B: 2; C: 10.
2. Într-o clasă sunt 40 de elevi din care 55% sunt fete. Câți băieți sunt în clasă ?
A: 22; B: 18; C: 20.
3. Un unghi este cu 28° mai mic decât complementul său. Ce măsuri au ?
A: $30^\circ, 60^\circ$; B: $31^\circ, 59^\circ$; C: $30^\circ, 58^\circ$.
4. Soluția ecuației $\frac{1}{2} - \frac{5x-4}{4} = \frac{x}{2} - 1 - \frac{x+1}{3}$ este:
A: 2; B: -2; C: 0.
5. În triunghiul ABC, $BC = 9$ cm, $AA' = 8$ cm ($AA' \perp BC$) și $BB' = 10$ cm ($BB' \perp AC$). Latura AC are lungimea:
A: 6 cm; B: 12 cm; C: 7,2 cm.
6. Știind că diferența dintre raza cercului circumscris și raza cercului înscris în triunghi echilateral este 15 cm, latura lui este:
A: $15\sqrt{3}$; B: $30\sqrt{3}$; C: $15\sqrt{2}$.
7. Elementele mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x-1 \leq \frac{2x-1}{3} < x+1 \right\}$ sunt:
A: $\{-3, -1, -2, 0, 1, 2\}$; B: $\{-2, -1, 0, 1\}$; C: $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$.
8. Arătați că polinoamele $P(X)$, $Q(X)$ ce verifică relația:
 $(X^2 - X + 1)P(X) + (X^2 + X - 1)Q(X) = 2$
și au grad 1 sunt:
A: $P(X) = X + 2$, $Q(X) = -X + 2$; B: $P(X) = -X + 2$, $Q(X) = X + 2$;
C: $P(X) = X - 1$, $Q(X) = X + 1$.
9. Media ponderată a numerelor 25, 36, 52, 48 cu ponderile 3, 6, 2 și 4 este:
A: 41; B: $39\frac{2}{15}$; C: $38\frac{2}{15}$.
10. O piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $4\sqrt{3}$ cm și unghiul format de o față laterală și planul bazei de 60° , are aria laterală și volumul:

A: 100 cm^2 , 200 cm^3 ; B: $95\sqrt{3}\text{ cm}^2$, 196 cm^3 ; C: $96\sqrt{3}\text{ cm}^2$, 192 cm^3 .

Barem de corectare: 1: 0,75p; 2: 0,75p; 3: 0,75p; 4: 0,75p; 5: 1p;
6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 110

1. Forma simplă a fracției: $F(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$ este:
A: $\frac{x+5}{5}$; B: $\frac{x+5}{x-5}$; C: $\frac{x-5}{x+5}$.
2. Triunghiul ABC are aria 168 cm^2 și AM mediană. Cât este aria $\triangle AMB$?
A: 48 cm^2 ; B: 84 cm^2 ; C: 112 cm^2 .
3. Calculând: $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \dots + \sqrt{200}$ obținem:
A: $10\sqrt{2}$; B: $60\sqrt{2}$; C: $55\sqrt{2}$.
4. Se amestecă apă la temperatura 70°C cu apă de 20°C . Care e raportul cantităților folosite pentru ca amestecul să aibă 40°C ?
A: 1; B: $2/3$; C: $1/2$.
5. Un paralelogram ABCD are aria $120\sqrt{3}\text{ cm}^2$ iar laturile AB, AD au lungimile 15 și 16 cm. Care este $m(\angle A)$?
A: 60° ; B: 45° ; C: 120° .
6. Rezultatul împărțirii $\frac{x^2 - y^2}{4xy} : \frac{x - y}{2y}$ este:
A: $\frac{2x}{x+y}$; B: $\frac{2xy}{x+y}$; C: $\frac{x+y}{2x}$.
7. Graficul funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3x+7}{3}$ este:
A: un segment; B: o dreaptă; C: o semidreaptă.
8. Un cilindru circular drept are $R = 5\text{ cm}$, $h = 8\text{ cm}$. Aria secțiunii axiale este:
A: 80 cm^2 ; B: 90 cm^2 ; C: 40 cm^2 .
9. Suma cifrelor numărului $10^{n+1} + 2 \cdot 10^n + 4$ este:
A: 14; B: 7; C: $2n$.

10. Un con circular drept are $R = 15$ cm și $h = 36$ cm.

- Aflați aria totală a conului
- La ce distanță de vârf secționez cu un plan paralel cu baza astfel ca generatoarea trunchiului are 26 cm ?
- Se cere raportul volumelor celor două corpuri

Barem de corectare: 1p din oficiu
1: 0,5p; 2: 0,5p; 3: 1p; 4: 1,5p; 5: 1p;
6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 0,5p; 10: 1,5p.

TEST NR. III

I. Calculați:

- $25 : 5 + 13 : 13 - 24 : 2 : 8$
- $2\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{50} - 3\sqrt{48})$
- $8 \cdot (-1)^3 \cdot [(-2)^5 - (-3)^3]^2$

II. 1. Aflați numerele $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{6}{x-2} \in \mathbf{Z}$.

2. Să se determine $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 3\}$.

3. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (m-3)x + \frac{m-1}{5}$. Dacă $A(1, -2) \in G_f$, aflați $m \in \mathbf{R}$.

III.1. Dacă laturile unui triunghi sunt direct proporționale cu 3, 4, 5 și perimetrul lui este 48 cm aflați aria triunghiului.

2. Calculați $2/3$ din 540.

3. Un paralelipiped dreptunghic are $L = 10$ cm, $l = 8$ cm, $h = 12$ cm. Aflați volumul, aria totală și diagonală lui.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu
I. 1) 0,50p 2) 1p 3) 1p
II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
III. 1) 1p 2) 0,50p 3) 0,50p; 1p; 0,50p

TEST NR. 112

I. Efectuați:

$$1) \left[0, (5) : 0,1(5) - 3\frac{1}{2} \right] : \frac{1}{7} - \frac{1}{3}$$

$$2) \left[2^{-2} + (-2)^{-2} \right] \cdot \left[(-1)^{10} + (-1)^{-10} \right]$$

$$3) (x^2 - 2x + 1) + (2x^2 + x - 3) - (3x^2 - x + 4)$$

II. 1. Fie mulțimile $A = \{2x - 3; x + 1; 3x - 1\}$ și $B = \{2x - 1; 2x + 1; 4x - 7\}$.
Aflați $x \in \mathbf{N}$ astfel ca $A = B$.

2. Aflați restul împărțirii lui $P(X) = X^2 - 2X + 3$ la $X - 1$.

3. Arătați că $x^2 - 4x + 5 > 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

III.1. În $\triangle ABC$ isoscel, $AB = AC = 30$ cm și $BC = 12\sqrt{5}$ cm. Aflați lungimile înălțimilor.

2. Aflați trei numere direct proporționale cu 4, 5, 6 și care au media aritmetică 25.

3. Piramida triunghiulară regulată are înălțimea 12 cm și unghiul muchiei laterale cu planul bazei de 30° . Aflați: volumul, aria totală, sinusul unghiului dintre o față laterală și bază, distanța de la un vârf al bazei la fața opusă.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 0,50p

II. 1) 1p 2) 0,50p 3) 0,50p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 0,5p+1p+0,5p+0,5p

TEST NR. 113

I. Efectuați:

$$1) 3 \cdot [5 + (2 + 3 \cdot 8) : 13]$$

$$2) 0,5 \cdot 0,75 \cdot 5\frac{1}{3}$$

$$3) \frac{11}{14} + \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{20}$$

II. Aflați numărul necunoscut:

$$1) \frac{x}{2} = \frac{10}{12}; 2) 5(x - 1) = 2x - 3; 3) x - 2 < 3x + 5.$$

III.1. Efectuați: $(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1) + (x-1)^2$.

2. Într-un triunghi dreptunghic o catetă este 8 cm, iar ipotenuza 10 cm. Aflați înălțimea corespunzătoare ipotenuzei și aria triunghiului.

3. Aflați volumul și aria totală pentru o prismă triunghiulară regulată știind că are înălțimea de 10 cm și latura bazei de 4 cm.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 0,50p 2) 0,50p 3) 1p

II. 1) 0,50p 2) 0,50p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 2p 3) 2p

TEST NR. 114

I. 1. Calculați: $-9 + 9 \cdot 3^{-1} + \sqrt{1,21}$.

2. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3(x+1) \leq 2x+7\}$, $B = (-\infty, 2]$. Calculați $A \cup B$ și $A \cap B$.

3. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, calculați $\frac{2a+3b}{5a-b}$.

II. 1. Găsiți a, b numere prime astfel încât $2a + 3b = 21$.

2. Fie polinomul $P(X) = 5X^4 - 3X^2 + mX - 1$.

a) Găsiți $m \in \mathbb{R}$ știind că restul împărțirii lui $P(X)$ la $X+2$ este 7;

b) Pentru m determinat, aflați suma coeficienților.

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția;

b) Aflați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $A(-1, a)$ aparține graficului.

III.1. Se consideră ABCD un romb și M, N, P, Q mijloacele laturilor sale.

a) Stabiliți natura lui MNPQ;

b) Aflați raportul ariilor lui ABCD și MNPQ.

2. Fie ABCDA'B'C'D' cub cu latura 6 cm și M, N mijloacele segmentelor AA' și BD'.

a) Calculați aria totală și volumul cubului;

b) Ce poziție are dreapta MN față de BD'?

3. Se dă un con circular drept cu $R = 3$ cm și $H = 4$ cm. Aflați:

a) Aria laterală;

b) Volumul conului.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p

2) 1p

3) 1p

II. 1) 1p

2) 0,5+0,5p

3) 0,5+0,5p

III. 1) 0,5+0,5p

2) 0,5+0,5p

3) 0,5+0,5p

TEST NR. 115

1. Efectuând calculele: $-\frac{3}{5} + \frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ obținem:

A: 0; B: $\frac{3}{50}$; C: $\frac{1}{15}$.

2. $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{7})^2}$ este egal cu:

A: $\sqrt{2} - \sqrt{7}$; B: $\sqrt{7} - \sqrt{2}$; C: $\sqrt{5}$.

3. Numărul $2^{100} - 2^{99} - 2^{98}$ este egal cu:

A: 2^{98} ; B: 2^{-97} ; C: nu se poate calcula.

4. Dacă card A = 3, card B = 5 și $A \cap B = \emptyset$, atunci card $A \cup B$ este:

A: 8; B: 5; C: 3.

5. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ atunci $\frac{2a+3b}{7a+b}$ este:

A: $\frac{34}{40}$; B: $\frac{34}{43}$; C: $\frac{17}{20}$.

6. Se consideră polinomul $P(X) = 5X^3 - 7X^2 + 3X + 8$. Atunci $P(\sqrt{2})$ este:

A: $10\sqrt{2} + 3$; B: $13\sqrt{2} - 6$; C: $3\sqrt{2}$.

7. Un con circular drept are $A_t = 90\pi$, $A_l = 65\pi$. Atunci înălțimea sa este:

A: 12 cm; B: 13 cm; C: 10 cm.

8. Aria unui paralelogram ABCD cu AB = 5 cm, AD = 3 cm și $m(\angle A) = 45^\circ$ este:

A: $\frac{15\sqrt{2}}{4}$; B: $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; C: $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

9. Perimetrul trapezului isoscel ABCD cu bazele AB = 10 cm, CD = 4 cm iar $m(\angle A) = 60^\circ$ este:

A: 38 cm; B: 26 cm; C: 20 cm.

10. Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu laturile 3 cm, 5 cm, 7 cm este:

A: 142 cm^2 ; B: 144 cm^2 ; C: 71 cm^2 .

Barem de corectare: 1p din oficiu

1: 1p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 0,75p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 0,75p; 8: 0,75p; 9: 1p; 10: 0,75p.

TEST NR. 116

1. Mulțimea soluțiilor ecuației $3(x - 2) = 2x + 7$ este:

A: \emptyset ; B: 1; C: 13.

2. Efectuând produsul $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ obținem:

A: $x^3 + y^3$; B: $x^3 - y^3$; C: polinom de grad II.

3. $\sqrt{144 + 25}$ este:

A: 13; B: 17; C: 15.

4. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$. $A \cap B$ este:

A: \emptyset ; B: $\{1, 2, 3, 4, 6\}$; C: $\{2, 3, 4, 6\}$.

5. Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ are:

A: o soluție; B: nici una; C: o infinitate de soluții.

6. Un paralelipiped dreptunghic cu lungimile laturilor de 2, 3, 4 cm are volumul:

A: 24 cm^3 ; B: 8 cm^3 ; C: 26 cm^3 .

7. VABCD piramidă patrulateră regulată cu latura bazei 4 cm și apotema 4 cm. Măsura unghiului diedru a două fețe laterale opuse este:

A: 90° ; B: 60° ; C: altă soluție.

8. Se consideră triunghiul ABC și AD înălțime. Dacă $BD = 4 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$, $AD = 3 \text{ cm}$, atunci distanța de la C la AD este:

A: $\frac{18}{6}$; B: $\frac{18}{5}$; C: $\frac{12}{5}$.

9. Fie rombul ABCD cu $AB = 5 \text{ cm}$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. Atunci lungimea diagonalei AC este:

A: $5\sqrt{3}$; B: 4; C: $6\sqrt{3}$.

10. Se consideră polinomul $P(X) = (X - 2)^{100} - 7X + 15$. Suma coeficienților săi este:

A: un număr mare care nu se poate calcula; B: 0; C: 8.

Barem de corectare: 1p din oficiu

I: 1p; 2: 0,75p; 3: 0,75p; 4: 1p; 5: 0,5p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 1p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 117

I. 1. Efectuați: $[0,6 - 0,3] - 0,6 \cdot \left(\frac{1}{2^3} : 0,25\right) + 1/3] : 0,1 - 0,2 \cdot 5$.

2. Să se afle numerele a, b, c știind că sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 12 și că produsul lor este 360.

3. Raționalizați numitorul: $\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$.

II. 1. Arătați că are loc inegalitatea: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$; $x, y, z \geq 0$.

2. Fie polinomul: $P(X) = X^2 - 2X - 8$.

a) Aflați restul împărțirii polinomului prin $X + 2$ și $X - 4$ fără a efectua împărțirile

b) Simplificați: $\frac{X^3 + 8}{X^2 - 2X - 8}$

III.1. Laturile neparalele BC și AD ale trapezului ABCD se intersectează în punctul M. Să se calculeze lungimile segmentelor MA, MB, MC și MD știind că $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 15$ cm și $DA = 8$ cm.

2. Într-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc latura bazei de $5\sqrt{3}$ cm și înălțimea piramidei de 6 cm. Să se calculeze:

a) aria laterală, aria totală și volumul piramidei

b) aria și volumul conului circumscris acestei piramide

Barem de corectare: 1p din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) a) 1p; b) 1p

III. 1) 1p 2) a) 1p; b) 1p

TEST NR. 113

I. 1. Efectuați: $\left[\frac{1}{1,2(27)} + \frac{(0,5)^2}{0,6} - \frac{22}{27} - 0,375 + 1 \right]^{1996}$.

2. Știind că trei numere sunt direct proporționale cu numerele 5, 7 și 11 și că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic este 42, să se afle cele trei numere.

3. Calculați: $\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{2}; \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right)$

II. 1. Arătați că are loc inegalitatea: $\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} \geq 2; a, b \geq 0$.

2. Dacă polinomul $X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$ este divizibil cu $X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$, arătați că primul este pătratul, iar al doilea este cubul unui binom.

3. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = mx + n$, să se determine m și n știind că f trece prin punctele $A(1, 2), B(-1, 0)$ și să se reprezinte grafic.

III.1. Diagonalele unui trapez ABCD ($AB \parallel CD$) se intersectează în punctul N . Să se calculeze lungimile segmentelor NA, NB, NC și ND știind că $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 21$ cm și $BD = 12$ cm.

2. Aria laterală a unei piramide patrulateră regulate este de $14,76$ cm², iar aria totală de 18 cm². Să se calculeze volumul piramidei.

3. Să se calculeze aria și volumul sferei care are aria cercului mare de 9π cm².

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

III. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

TEST NR. 119

I. 1. Efectuați: $\left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot [3,331 - (1 + 0,1)^3]^2$.

2. Media aritmetică a trei numere este 20. Primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea și media aritmetică dintre al doilea și al treilea

este 25. Să se afle numerele.

3. Calculați: $\left(\frac{2}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{22}} + \frac{3}{\sqrt{75}}\right) : (2\sqrt{3})^{-1}$.

II. 1. Verificați dacă inegalitatea: $\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 4$ are loc pentru $xy = 1$.

2. a) Arătați că polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X - 2$ și $R(X) = X + 2$.

b) Simplificați funcția $F(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^4 - 16}$.

III.1. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 2 dm, măsura unghiului dintre înălțimea și mediana duse din vârful unghiului drept de 30° . Să se afle lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept.

2. O piramidă cu baza ABCD dreptunghi cu $AB = 2a$, $BC = a$, înălțimea $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia punctul P la mijloc.

a) Să se arate că triunghiul APC este isoscel și să se calculeze aria sa.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei și volumul său.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p

II. 1) 1p 2a) 1p 2b) 1p

III. 1) 1p 2a) 1p 2b) 1p

TEST NR. 120

I. 1. Efectuați: $\left\{\frac{111}{500} : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{50} + \frac{1}{500}\right) + [0, (14) + 0, (27)] \cdot \frac{198}{41}\right\} : 0,06$.

2. Să se găsească trei numere știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 7,4,12 și că suma celor două mai mari este 380.

3. Calculați: $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8\sqrt{3}}{6}\right) : \left(-\frac{9}{7\sqrt{3}}\right)$

II. 1. Rezolvați sistemul de inecuații: $\begin{cases} 3(x-2) \leq 7(x-1) - 5 \\ 3x - 4 \leq 9(x-2) + 3 \end{cases}$

2. Se dă polinomul: $P(X) = X^4 + mX^3 - 7X^2 + nX + p$. Determinați m, n, p știind că $P(X)$ se divide cu $X - 1$, $X - 2$ și $X - 3$, apoi rezolvați ecuația $P(X) = 0$.

3. Într-un triunghi dreptunghic proiecțiile catetelor pe ipotenuză sunt de 7 cm și 63 cm. Să se afle lungimea înălțimii din vârful unghiului drept.

III.1. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul cubului a cărui diagonală este de $10\sqrt{3}$ cm.

2. O piramidă are ca bază trapezul dreptunghic ABCD ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ = \angle B$), $AD = a$, $BC = 2a$ și $AB = 2a$. Înălțimea VO cade în O mijlocul lui AB, iar $VO = a$. Să se calculeze:

- ariile triunghiurilor VAB, VAD și VBC.
- volumul piramidei.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 III. 1) 1p 2a) 1p 2b) 1p

TEST NR. 121

I. 1. Efectuați: $\left\{ \left[\frac{4}{3} - 0, (3) \right]^2 : 0,25 \right\} : \left(\frac{37}{100} : 0,0925 \right) + 12,5 + 0,64$.

2. Un sacou costă 576.000 lei. După două reduceri consecutive costul sacoului a rămas 400.000 lei. Știind că reducerile au fost proporționale cu noile prețuri, să se calculeze prețul sacoului după prima reducere.

3. Calculați: $3 \cdot \frac{2}{5} - \left(\frac{4}{\sqrt{9}-1} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9} \right)$

II. 1. Să se rezolve sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 9 + \frac{4x-11}{7} < \frac{x-3}{5} \\ 1 - \frac{1-x}{-1} > \frac{-x-1}{-1} \end{cases}$$

2. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real a pentru care polinoamele $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$ și $Q(X) = X^3 - X^2 + 4X + a$ sunt prime între ele.

3. Să se afle lungimea înălțimii din vârful unghiului drept în triunghiul dreptunghic cu ipotenuza de 13 cm și raportul catetelor de $4/9$.

III.1. Pe planul rombului ABCD, cu latura egală cu 18 cm și $m(\angle D) = 120^\circ$ se ridică perpendiculara $AP = 9$ cm. Să se afle distanțele de la punctul P la BC, BD și CD.

2. O piramidă are muchiile laterale congruente și formează cu planul bazei unghiuri 45° . Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de 60° și bazele de 6 și 8 cm. Să se calculeze:

- raza cercului circumscris trapezului
- volumul piramidei

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- I. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 II. 1) 1p 2) 1p 3) 1p
 III. 1) 1p 2a) 1p 2b) 1p

TEST NR. 122

I. 1. Efectuați: $\left[0,25 + \left(\frac{7}{30} - \frac{1}{24} \right) : \left(\frac{2}{3} + 0,5 \right) \right] : 0,1(6) - 1 : \frac{7}{2^4}$.

2. Dacă $\frac{3a}{5b} = \frac{2}{7}$, calculați $\frac{7a-2b}{7a+2b}$.

3. Calculați:

a) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$;

b) $\sqrt{18+2\sqrt{17}} + \sqrt{18-2\sqrt{17}}$.

II. 1. Să se găsească valorile lui x, care verifică simultan inecuațiile:

$$3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} > 4 - \frac{7-3x}{5} \text{ și } 7(3x-6) + 4(17-x) > 11 - 5(x-3)$$

2. a) Fie polinomul $P(X) = 2X^2 - X - 3$. Calculați $P(-1)$.

b) Simplificați fracția $\frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{(x+1)(2x-3)}$.

III.1. Pe planul dreptunghiului ABCD cu $AB = 16$ cm și $BC = 12$ cm se ridică perpendiculara $MD = 12$ cm. Să se afle:

- Distanța de la punctul M la dreapta AB și BC
- Distanța de la D la planul (MBC)

2. Secțiunea axială a unui con este un triunghi isoscel al cărui perimetru este de 18 cm, iar lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor

neparalele este de 4 cm. În el se face o secțiune paralelă cu planul bazei la $\frac{2}{3}$ din înălțimea față de vârf. Să se calculeze:

- aria totală și volumul conului
- aria totală și volumul trunchiului de con

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- | | | | |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| I. 1) 1p | 2) 1p | 3a) 0,50p | 3b) 0,50p |
| II. 1) 1p | 2a) 1p | 2b) 1p | |
| III. 1a) 0,75p | 1b) 0,75p | 2a) 0,75p | 2b) 0,75p |

TEST NR. 123

I. 1. Efectuați: $\left(1 + \frac{13}{25}\right) : \left(0,24 + \frac{1}{75}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1,17}{3} - 0,03\right)$

2. Calculați valoarea expresiei: $\frac{3x-7y}{5x+4y}$ știind că $x/y = 0,3$.

3. Să se calculeze: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} + \frac{\sqrt{27} + \sqrt{45}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{75} - \sqrt{54}}{5 - 3\sqrt{2}}$.

II. 1. Determinați elementele mulțimii: $X = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x - 2 \leq \frac{2x-3}{3} < x \right\}$.

2. Arătați că $(X-1)^2$ divide $P(X) = X^4 - 3X + 3$.

3. Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x + y\sqrt{3} = 7 \\ 3\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}y = -6 \end{cases}$$

III.1. Un paralelipiped ABCDA'B'C'D' are dimensiunile AB = 3 cm, BC = 4 cm și AA' = 12 cm. Să se calculeze:

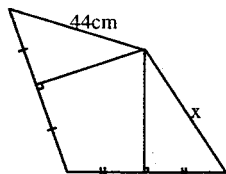
- lungimea diagonalei paralelipipedului, aria și volumul
 - distanța de la C la AC'
2. Un trunchi de con are generatoarea bazei de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm.
- Să se determine aria laterală și volumul trunchiului de con
 - Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- | | | |
|----------------|-----------|----------------------|
| I. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |
| II. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |
| III. 1a) 0,75p | 1b) 0,75p | 2a) 0,75p; 2b) 0,75p |

TEST NR. 124

- Între numerele $a = 2^{46}$, $b = 3^{31} - 9^{15}$ este relația:
A: $a < b$; B: $a = b$; C: $a > b$.
- Care dintre egalități este falsă ?
A: $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$; B: $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{5-3\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}$;
C: $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 5-3\sqrt{3}$; D: $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = -5+3\sqrt{3}$.
- Care dintre inegalități este falsă ?
A: $a^3 \leq a^2 < a$; B: $a \leq \sqrt{a} \leq \frac{1}{a}$; C: $a^2 \leq \sqrt{a} \leq \frac{1}{a^2}$; D: $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a$.
- Știind că x , $x-2$, $x+2$ pot fi laturi ale unui triunghi dreptunghic, atunci ipotenuza lui poate fi:
A: 9; B: 8; C: 10; D: 6.
- În figura alăturată x are măsura de:
A: 40 cm; B: 42 cm; C: 43 cm; D: 44 cm.
- Fie polinomul $P(X) = 4X^2 - aX + b$. Dacă $P(1) = P(2) = 1$, atunci ecuația $\frac{P(X)}{2X-3} = 1$ are soluția:
A: $\{3\}$; B: $\{2\}$; C: $\{4\}$; D: $\{-2\}$.
- Fie $E(x) = \frac{3x-2}{9x^2-12x+4} - \frac{2x}{3x^2+2x} + \frac{4}{4-9x^2}$. Valorile a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$ sunt:
A: $\{-1/3, -2\}$; B: $\{-1/2, -1\}$; C: $\{-1/3, -1\}$; D: $\{0, 1\}$.
- Pe planul $\triangle ABC$ echilateral se ridică MA , NC perpendiculare cu $MA = 2NC$. Următoarea afirmație e falsă:
A: $\triangle MNC$ dreptunghic; B: $MA \perp BC$; C: $[MB] \equiv [MC]$; D: $NA = NB$.
- Într-un pahar conic cu vârful în jos, de rază 6 cm și înălțime 8 cm, se introduce o bilă de rază 1 cm și se toarnă apă până se acoperă bila și nu mai mult. Înălțimea apei este:
A: $7/3$ cm; B: $8/3$ cm; C: 3 cm; D: 4 cm.

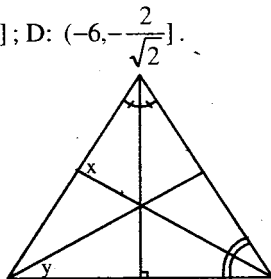


10. Dacă ABCD tetraedru regulat, iar I, J, K, L mijloacele muchiilor [AC], [AD], [BC], [BD], următoarea afirmație e falsă:
 A: IJLK romb; B: $CD \subset$ în planul mediator [AB];
 C: $BC \perp AD$; D: $KI \parallel BD$.

Barem de corectare: 1p din oficiu
 1: 1p; 2: 1p; 3: 1p; 4: 1p; 5: 0,5p;
 6: 1p; 7: 1p; 8: 0,5p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 125

- Numărul $n = (3^{n+2} \cdot 4^{n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+4}) : 12^{n+2}$ are valoarea:
 A: 6; B: 7; C: 8; D: 12.
- Dacă $\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = \frac{5}{8} = \frac{6}{z}$, atunci (x, y, z) este:
 A: (4,8; 6,4; 9,6); B: (40; 60; 90); C: (30; 40; 60); D: (2,4; 3,2; 4,8).
- Care e probabilitatea ca înlocuind pe n, la întâmplare, cu o cifră, numărul $\frac{8}{n}$ să fie număr natural ?
 A: 1/3; B: 4/10; C: 3/10; D: 4/9.
- Numărul $-\sqrt{2}$ aparține intervalului:
 A: $(-\sqrt{2}, 5]$; B: $[-1,41; 2)$; C: $(-\sqrt{3}; -1,41]$; D: $(-6, -\frac{2}{\sqrt{2}}]$.
- În triunghiul alăturat măsurile unghiurilor x și y sunt de:
 A: $122^\circ, 41^\circ$; B: $121^\circ, 42^\circ$;
 C: $123^\circ, 41^\circ$; D: $124^\circ, 42^\circ$.
- Propoziția următoare este falsă:
 A: Dreapta de ecuație $x + 5 = 0$ e perpendiculară pe Ox;
 B: Dreapta de ecuația $y = -1$ e perpendiculară pe Oy;
 C: Dreptele $2x = 3$ și $3y - 1 = 0$ sunt perpendiculare;
 D: Dreptele $y = 2x + 3$ și $y = 2x - 3$ sunt perpendiculare.
- Dacă $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$ dreptunghice și isoscele (A, B, C, D necoplanare), iar I e mijlocul lui [BC], atunci DI este de:
 A: $2\sqrt{6}$; B: $\sqrt{6}$; C: 6; D: $3\sqrt{6}$.



8. În trei conuri identice se găsește lichid până la înălțimile h , $2h$, $3h$ (de la vârf). Volumele lor vor fi:

A: V , $2V$, $3V$; B: V , $4V$, $9V$; C: V , $6V$, $9V$; D: V , $8V$, $27V$.

9. Fie ABCDEFGH cub cu I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T sunt mijloacele lui AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE. Următoarele drepte nu sunt perpendiculare:

A: AE și NO; B: EF și OJ; C: AH și IF; D: MN și SI.

10. În ABCDEFGH paralelipiped, ABCD pătrat cu $AB = 10$ iar înălțimea $AE = x$. Dacă $m(\angle EBO) = 60^\circ$, x va fi:

A: 9; B: 10; C: 11; D: $10\sqrt{2}$.

Barem de corectare: 1p din oficiu

1: 0,75p; 2: 0,75p; 3: 1p; 4: 0,50p; 5: 1p;

6: 1p; 7: 1p; 8: 0,5p; 9: 1p; 10: 1p.

TEST NR. 126

- I. 1. Fie $A = \left\{ -5; \frac{4}{2}; -\frac{6}{3}; -\frac{8}{\sqrt{4}}; -\frac{7}{7}; -\frac{12}{-2}; \sqrt{3}; \frac{1}{5}; -\sqrt{2}; \frac{0}{3}; \sqrt{100} \right\}$. Calculați:

a) $A \cap \mathbf{N}$; b) $A \cap \mathbf{Z}$; c) $A - \mathbf{Q}$.

2. Rezolvați:

a) $2x = 7$, $x \in \mathbf{Q}$; b) $-3x + 1 = 4$, $x \in \mathbf{Z}$; c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 11 \end{cases}$, $x, y \in \mathbf{R}$;

d) $|x - 11| \leq 2$.

3. Determinați $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca:

a) $\frac{7}{x} \in \mathbf{N}$; b) $\frac{3}{x-3} \in \mathbf{Z}$; c) $\frac{x+5}{x-2} \in \mathbf{N}$.

- II. 1. Un elev ajunge la școală în 15 minute dacă merge pe jos, în 6 minute cu bicicleta și în 2 minute cu un taxi. Dacă, pe jos, viteza elevului este de 6 km/h, aflați viteza medie de mers cu bicicleta și cu taxi.

2. În ABCD trapez dreptunghic ($m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$), $AC = 10$ cm, $BD = 8\sqrt{2}$ cm. Dacă AC și BD se intersectează în O, aflați distanța de la O la AD când $AB = 8$ cm.

3. Fie mulțimile $A = \left\{ (x, y) \mid y > \frac{1}{2}x + 1 \right\}$ și $B = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{1}{2}x + 1 \right\}$.

- a) Reprezentați grafic $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 1$;
- b) Hașurați B și stabiliți care dintre punctele $M_1(2, 3), M_2(0, 0), M_3(0, 1), M_4(0, 2), M_5(-2, 0), M_6(-3, 0), M_7(\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$, aparțin lui B;
- c) Verificați că $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus A \cup B = G_f$.

III.1. În $\triangle ABC$, $m(\angle B) = 45^\circ$, $m(\angle C) = 60^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $CE \perp AB$, $E \in (AB)$. Dacă $BD = 6$ cm, aflați $\sin A$, $\cos A$.

2. Pe planul $\triangle ABC$ echilateral se ridică AA' , BB' perpendiculare. Dacă $AB = 6$ cm, $AA' = 8$ cm, aflați $BB' = x$, astfel ca $\triangle A'B'C$ dreptunghic în A' .

3. Fie $ABCDEFGH$ paralelipiped dreptunghic cu baza $ABCD$ pătrat, $AB = 10$ cm.

- a) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci $OE \perp BD$;
- b) Dacă $AE = 10$ cm, calculați $\sin \angle AOE$ și $\cos \angle EBO$.
- c) Dacă $m(\angle AOE) = 60^\circ$, aflați AE .
- d) Dacă $AE = 8$ cm, aflați suma tuturor muchiilor, aria și volumul paralelipipedului

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- | | | |
|------------|-------|-------|
| I. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |
| II. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |
| III. 1) 1p | 2) 1p | 3) 1p |

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1991

I. 1. Calculați: $(-0,5)^3 + (-1)^4 + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{0,0025} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} \right) \cdot \sqrt{5}$.

2. Fie mulțimea $A = \{-1, 0, 1\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| \geq 1\}$. Scrieți mulțimea B ca reuniune de intervale și apoi efectuați $A \cap B$.

3. Să se rezolve inecuația: $\frac{\sqrt{2x} - 1}{2x^2 + 2 - 2\sqrt{2x}} > 0$.

4. a) Care este condiția ca o sumă de numere nenegative să fie zero ?

b) Rezolvați ecuația: $|x^2 - 9| + |2x - 6| = 0$.

II. 1. Fie funcțiile $f: [-5, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x - 3$ și $g: [2, 5] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1$.

a) Cercetați dacă punctul $A(-2, -1)$ aparține unuia din graficele funcțiilor f sau g ;

b) Reprezentați grafic în același sistem de axe de coordonate funcțiile f și g ;

c) Pentru $x \in [-5, 2) \cap [2, 5]$ rezolvați sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

2. Simplificați fracția: $E(x) = \frac{(x^2 + 2x + 3)^2 - 5(x^2 + 2x + 3) + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

III.1. Fie ABCD un romb cu latura egală cu a și unghiul $A = 60^\circ$. În punctul

A se ridică perpendiculara $AM = \frac{3a}{2}$ pe planul (ABC). Să se afle:

a) volumul prisme drepte cu baza rombul ABCD și înălțimea egală cu AM ;

b) unghiul plan al diedrului format de planele (ABC) și (BMD);

c) distanța de la punctul M la dreapta BC;

d) volumul piramidei cu vârful în B și baza AMD.

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1992

I. Calculați:

1) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} : \frac{6}{5} + \frac{1}{2}$;

2) $2^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0,5 + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

II. 1. Să se rezolve ecuația $2x + 3 = -5$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Se dă $\frac{a}{b} = 0,6$. Să se calculeze $\frac{2a + 3b}{3b}$.

3. Să se rezolve în \mathbf{R} sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x + 2[y - 3(x - 1)] = 25 \\ y - 3[x - 2(y + 1)] = 0 \end{cases}$$

III. Se dau mulțimile $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1 - 3x}{-2} < 3\right\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \text{ divide } 12\}$.

Să se afle $A \cap B$ și $A \cup B$.

IV. Se consideră funcția liniară $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și $x_1 \neq x_2$. Să se arate că: a) $f(x_1) \neq f(x_2)$; b) $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

V. Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbf{R}$ numărul: $(a^3 + 3a^2 + a) \cdot (a^3 + 3a^2 + a + 2) + 1$ este pătrat perfect.

VI. Să se efectueze $\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{x^2-4}\right) \cdot \frac{x^2-4x+4}{x}$.

VII. În dreptunghiul ABCD cu $AB = 4$ cm și $BC = 3$ cm se duce diagonala AC. Să se afle înălțimea DI a triunghiului ADC și cosinusul unghiului $\angle CDI$.

VIII. Baza piramidei VABCD este rombul ABCD cu $AB = a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ și înălțimea $VD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Calculați:

- 1) aria totală și volumul piramidei;
- 2) unghiul format de planele (VBC) și (ABC);
- 3) distanța de la vârful D la fața (VBC).

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1993

1. Calculați:

- a) $(-4)^2 - (-2)^3 - 4^2$;
- b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} : \frac{2}{3}$;
- c) $(x+2)(2-x) - (x-1)^2$;
- d) cel mai mare divizor al polinoamelor $9 - X^2$; $X^2 - 4X + 3$;
 $X^2 - 6X + 9$;
- e) aria triunghiului echilateral ABC, știind că $AB = 8\sqrt{3}$ cm.

2. Rezolvați:

- a) $3(x-2) - (-6+x)(-2) = -18$;
- b) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;
- c) $-4x + 8 \leq 0$.

3. Se dă $E(x) = \left(\frac{1}{x-3} + \frac{9-x^2}{x^2-x+1} \cdot \frac{1}{x-3} \right) : \frac{10-x}{x^3+1} - 2$.

- a) Verificați dacă $E(x) = \frac{7-x}{x-3}$;
- b) Scrieți numerele reale pentru care $E(x)$ nu are definită valoarea.

4. Cubul ABCDA'B'C'D' are latura de 20 cm iar M este mijlocul lui [CC'].

- a) Calculați aria totală și volumul cubului;
- b) Calculați volumul piramidei D'ABD;
- c) Calculați aria triunghiului D'MA;
- d) Calculați distanța de la punctul M la planul determinat de punctul D' și dreapta BD.

Barem de corectare: 1 punct din oficiu

- 1. a) 0,50p b) 0,50p c) 0,50p d) 0,75p e) 0,75p;
- 2. a) 0,50p b) 0,50p c) 0,50p;
- 3. a) 0,75p b) 0,75p;
- 4. a) 0,50p b) 0,50p c) 0,50p d) 0,50p.

CONCURSUL DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea specială iunie 1994

I. Calculați:

a) $(5-15)^2 - (5^2 - 15^2) + \sqrt{25^2 - 15^2}$;

b) $\left[\frac{1}{5} + 0, (3) \right] \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0, (3) + [0, (3)]^2 \right\}$;

c) $P(1 - \sqrt{2})$, unde $P(X) = X^2 - 2X - 1$.

II. 1. Un con circular drept și un cilindru circular drept au raze egale și înălțimi egale. Aflați valoarea raportului volumelor celor două corpuri.

2. Se dă pătratul ABCD cu $AB = 4$ cm. Fie punctele M și N pe segmentele $[AB]$ și respectiv $[DC]$ astfel încât $AM = CN = 3$ cm. Calculați: a) aria patrulaterului MBND; b) distanța de la punctul B la dreapta MD.

III.1. Se dă funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția dată;

b) Determinați numerele $m \in \mathbf{R}$ pentru care $f(m) \leq \frac{1-m}{-2}$.

2. Polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $X^2 - 4$ obținându-se câtul $(X^3 - X + 1)$. Determinați polinomul $P(X)$ știind că $P(2) = 6$ și $P(-2) = 2$.

IV.1. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm și înălțimea de 3 cm. Calculați: a) volumul piramidei; b) aria laterală a piramidei.

2. O prismă triunghiulară regulată dreaptă are muchia laterală de 9 cm, iar muchia bazei este $\frac{2}{3}$ din înălțime. Calculați: a) aria laterală a prisme; b) volumul prisme; c) distanțele de la centrul unei fețe laterale la celelalte fețe ale prisme.

Barem de notare: 1 punct din oficiu

I. a) 1p b) 0,50p c) 0,5p;

II. 1. Pentru exprimarea volumelor (0,5p), finalizare (0,5p);

2. a) 0,75p b) 0,25p;

III. 1. a) 1p b) 1p;

2. Pentru schema teoremei împărțirii (0,25p), finalizare (0,25);

IV. 1. a) Figura (0,25p), finalizare (0,5p) b) 0,50p;

2. a) 0,50p b) 0,15p c) $4 \cdot 0,15p = 0,60p$.

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1994

I. 1. Calculați:

a) $\frac{16}{81} - \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{4} : \frac{4}{9}$;

b) $0,006 \cdot (-10)^3 + \frac{33}{0,5} \cdot 10^{-1}$.

2. În planul raportat la un sistem de axe ortogonale xOy să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x - 0,5$.

3. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } 4x - 3(x+1) \geq 0\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } 2(x+1) - 8 \leq 0\}$. Să se calculeze $A \cap B$.

4. În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. a) Să se calculeze lungimile ipotenuzei [BC], a înălțimii [AD] și a segmentului [BD]; b) Dacă paralela prin D la dreapta AC intersectează cateta [AB] în E să se afle raportul ariilor triunghiului BED și BAC.

II. 1. Arătați că: a) numărul $n = \sqrt{63} - 7\sqrt{3} + \sqrt{147} - 2\sqrt{7} - \frac{7}{\sqrt{7}}$ este număr

întreg; b) numerele $|1 - \sqrt{3}|$ și $|\sqrt{3} + 1|$ au suma $2\sqrt{3}$ și produsul 2.

2. Media aritmetică a trei numere este 7. Să se afle unul dintre aceste numere știind că media aritmetică a celorlalte două este 5,50.

3. Să se afle raza, înălțimea, volumul și aria laterală a unui con circular drept pentru care desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc cu unghiul de 120° și raza de 9 cm.

III.1. Fie polinomul $P(X) = a^2X^4 - 2abX^3 + b^2X^2 + a^2X - 2a + 1$. Să se determine a, b $\in \mathbf{Z}$ astfel încât $P(X)$ să fie divizibil cu $X - 1$.

2. Să se simplifice $E(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$.

3. Să se calculeze volumul unei piramide patrulateră regulate știind că are înălțimea $h=6$ cm și raportul dintre aria laterală și aria bazei $k = 3$.

Barem de notare: 1 punct din oficiu

I. 1. 0,50p 2. 0,75p 3. 0,75p 4. 1p

II. 1. 1,25p 2. 1p 3. 0,75p

III. 1. 0,50p 2. 0,75p 3. 1,75p

Barem de corectare și notare:

- I. 1. a) 0,25p b) 0,25p
2. Tabelul de valori al funcției de gradul I (0,50p);
Reprezentarea grafică (0,25p).
3. Scrierea mulțimii A ca interval de numere reale (0,25p);
Scrierea mulțimii B ca interval de numere reale (0,25p);
 $A \cap B$ (0,25p)
4. a) BC 0,10p, AD 0,15p, BD 0,25p;
b) $\triangle BED \sim \triangle BAC$ și raportul de asemănare (0,25p);
raportul ariilor celor două triunghiuri (0,25p).
- II. 1. a) $n = 0$ (0,75p) b) suma (0,25p); produsul (0,25p);
2. Formula mediei aritmetice a trei numere (0,50p);
Suma a două numere este dublul mediei aritmetice și înlocuirea în
media aritmetică a celor trei numere (0,25p)
Rezolvarea ecuației (0,25p)
3. Raza conului (0,25p), înălțimea (0,20p),
volumul (0,20p), aria laterală (0,10p)
- III. 1. Calcularea lui $P(1)$ (0,15p), scrierea sumei de pătrate egală cu zero
(0,25p), aflarea numerelor a și b (0,10p).
2. Descompunerea numărătorului în factori ireductibili (0,25p), a
numitorului (0,25p), simplificarea (0,25p).
3. $A_{lat} = \frac{P_b \cdot A_p}{2}$ (0,25p); A_b (0,25p); raportul celor două arii (0,25p);
 $\left(\frac{h_{pir}}{a_b} \right)^2$ (0,50p); aflarea apoteamei și a volumului piramidei (0,50p).

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1995

SUBIECTE:

- I.1. Să se calculeze: punctaj
- a) $4 - 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-8)$; 0,50p
- b) $\left[3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} - 1 : \frac{1}{3} + (0,5)^2 \right] : 2 \frac{1}{2}$; 0,50p
- c) $\left[\frac{7}{2\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{24}} + \frac{5}{\sqrt{54}} \right] \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{216}} \right)^{-1}$; 0,50p
2. Un dreptunghi cu perimetrul de 153,6 cm are dimensiunile proporționale cu numerele 7 și 9. Să se afle dimensiunile dreptunghiului. 0,50p
3. Se consideră triunghiul dreptunghic BAC ($m(\angle A) = 90^\circ$) având $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Prin mijlocul M al catetei [AB] se duce o paralelă la AC care intersectează ipotenuza în N. Să se afle:
- a) înălțimea triunghiului ABCD corespunzătoare ipotenuzei; 0,50p
- b) cât la sută din aria triunghiului ABC reprezintă aria triunghiului MBN. 0,25p
4. Să se afle volumul unui con circular drept care are aria totală de 96π cm² și aria laterală 60π cm². 0,75p
- II.1. Să se determine fracția ireductibilă la care poate fi adusă:
- $$E(x) = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{1 - x + x^2 - x^3} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
 1p
2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = mx + 2m$, $m \in (-3, +\infty)$.
- a) Să se determine m astfel încât punctul A(m, 3) să aparțină graficului funcției f; 0,75p
- b) Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2$. 0,50p
3. Să se determine elementele mulțimii:
- $$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 x} = 6 - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}x} \right\}$$
 1p

III.1. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X^3 - 2$ este egal cu pătratul câtului. Să se afle acest rest știind că:

$$P(-2) + P(2) + 34 = 0$$

1,05p

2. Se consideră piramida triunghiulară regulată $SABC$ având înălțimea de $\sqrt{2}$ cm, muchia bazei de $2\sqrt{3}$ cm și punctele M , N , P respectiv mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale bazei.

a) Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei;

0,45p

b) Dacă $SM \perp SN$ să se arate că $SP \perp (SMN)$.

0,75p

Notă: Fiecare lucrare primește un punct din oficiu.

Barem de corectare și notare:

- I. 1. a) 0,50p; b) 0,50p; c) 0,50p
2. Formula perimetrului dreptunghiului și proporționalitatea (0,25p) finalizare (0,25p).
3. a) Ipotenuza (0,25p), înălțimea corespunzătoare ipotenuzei (0,25p); b) 0,25p
4. Raza bazei (0,10p), generatoarea (0,15p), înălțimea (0,25p), volumul (0,25p).
- II. 1. Descompunerea numitorului în factori și a număratorului primei fracții (0,25p), cel mai mic multiplu comun și amplificarea (0,25p), calculele la numărătorul fracției obținută din paranteză (0,25p), finalizare (0,25p).
2. a) $f(m) = m^2 + 2m = 3$, $m^2 + 2m - 3 = 0$ (0,25p), $(m - 1)(m + 3) = 0$ (0,25p), rezolvarea ecuației (0,25p). b) perechea de puncte (0,25p), graficul (0,25p).
3. Eliminarea primului radical și a pătratului (0,25p), scrierea numărului de sub al doilea radical ca pătrat (0,25p), eliminarea radicalului și a pătratului, reducerea termenilor asemenea (0,25p), soluția ecuației și finalizare (0,25p).
- III. 1. $P(X) = (X^3 - 2) \cdot Q(X) + Q^2(X)$ (0,20p), $\text{grad } Q^2 < 3 \Rightarrow \text{grad } Q = 1$ și $Q(X) = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (0,10p), $P(X) = (X^3 - 2)(aX + b) + (aX + b)^2$ (0,15p), $P(-2) + P(2) + 34 = 0 \Leftrightarrow (-2a + b - 5)^2 + (2a + b + 3)^2 = 0$ (0,20p), sistemul $\begin{cases} -2a + b - 5 = 0 \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases}$ și soluția (0,25p), expresia lui $Q^2(X)$ (0,15p).
2. a) Apotema piramidei (0,15p), A_1 (0,15p), V (0,15p); b) $OM \perp PN$ (0,20p), $PN \perp (SOM)$ (0,15p), $SM \perp (SPN)$ (0,15p) finalizare (0,25p).

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea august-septembrie 1995

SUBIECTE:

I.1. Să se calculeze:

a) $2^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$;

punctaj

0,50p

b) $-2 : \left(-\frac{1}{5}\right) - 0,001 \cdot 1000$.

0,75p

2. Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația:

$$\frac{2}{3}(3x - 12) = x - 4$$

1p

3. Să se afle un număr natural știind că 7% din el este 28.

0,75p

4. Un cilindru circular drept cu raza de 6 cm are aria laterală de $156\pi \text{ cm}^2$. Să se afle generatoarea cilindrului.

1p

II.1. Să se calculeze: a) $(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})$; b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}$.

a) 0,50p

b) 0,50p

2. Se consideră mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ și } -2 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ și } x \text{ divide } 15\}$. Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$.

0,75p

3. Să se efectueze, simplificând pe cât posibil rezultatul:

$$E(x) = \left(\frac{4}{x+3} - \frac{5-3x}{9-x^2} \right) : \frac{x-7}{x-3}$$

0,50p

4. În triunghiul dreptunghic ABC, ($m(\angle A) = 90^\circ$), cu $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, notăm cu D piciorul înălțimii din A pe ipotenuză. Paralela prin D la AB intersectează [AC] în E. Să se afle BD și EC.

0,75p

III.1. Să se afle $m, n \in \mathbf{R}$ știind că polinomul:

$$P(X) = X^2 + mX + n$$

dă restul 2 prin împărțirea la $X - 1$ și restul 5 prin împărțirea la $X - 3$.

0,50p

2. Să se simplifice fracția:

$$E(x) = \frac{4x^2 - 4x - 15}{4x^2 - 12x + 5}$$

0,50p

3. O piramidă triunghiulară regulată VABC are înălțimea de 6 cm și apotema de $4\sqrt{3}$ cm. Să se calculeze:

- a) aria laterală și volumul piramidei; 0,50p
 b) la ce distanță de vârf se află punctul P, pe înălțimea piramidei pentru ca triunghiul VPB să fie isoscel de bază [VB]. 0,50p

Notă: Fiecare lucrare primește un punct din oficiu.

CONCURS DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1996

SUBIECTE:

- | | punctaj |
|---|---------|
| I.1. Calculați: a) $6 + 6 : 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5$; b) $\frac{6}{12} + \frac{5}{15} + \frac{4}{24}$; | |
| c) $\frac{\sqrt{18}-3}{\sqrt{2}-1} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right) : \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{5}}$. | 1,50p |
| 2. În clasă sunt 18 fete, ceea ce reprezintă 60% din elevii clasei. Câți elevi sunt în clasă ? | 0,75p |
| 3. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 12, 18 și 40, dă de fiecare dată restul 7. | 0,50p |
| II.1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale: | |
| a) $2(x+8) = 5x+1$; b) $x-1 \geq \frac{3x-5}{2}$. | 1,25p |
| 2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. a) Trasați graficul funcției f; b) Determinați punctele graficului funcției f care au abscisa egală cu ordonata. | 0,75p |
| 3. Descompuneți în factori ireductibili: $(x^2-4)^2 - (x^2-5x+6)^2$. | 0,50p |
| 4. Fie polinomul $P(X) = (2X-3)^{1996} + X + 1$. a) Calculați $P(1)$ și $P(2)$; b) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $(X-1)(X-2)$. | 0,75p |
| III.1. În $\triangle ABC$ avem $m(\angle BAC) = 90^\circ$, $m(\angle ACB) = 30^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Demonstrați că aria triunghiului ABD este egală cu o treime din aria triunghiului ACD. | 0,75p |

2. Cubul ABCDA'B'C'D' are muchia de $\sqrt{2}$ cm. Să se afle:
 a) aria totală, volumul și diagonala cubului; b) unghiul dreptelor AB' și BD; c) unghiul dreptei AB' cu planul (BDD'). 1,25p
3. Un trunchi de con circular drept are aria laterală egală cu 100π cm², înălțimea de 8 cm și generatoarea de 10 cm. Să se afle: a) volumul trunchiului de con; b) volumul conului din care provine trunchiul de con. 1p

Notă: Fiecare lucrare primește un punct din oficiu.

Barem de corectare și notare:

Din oficiu: 1p.

Subiectul I: (2,75p) repartizate astfel:

- 1) a) 0,75p; b) 0,50p; c) 0,25p.
- 2) 0,75p
- 3) pentru $x-7$ este c.m.m.m.c. al numerelor 12, 18 și 40 se acordă (0,25p), finalizare (0,25p).

Subiectul II: (3,25p) repartizate astfel:

- 1) a) 0,75p; b) pentru $x \leq 3$ se acordă (0,40p), finalizare (0,10p).
- 2) a) 0,50p; b) $f(x) = x$ (0,10p), finalizare (0,15p).
- 3) 0,50p
- 4) a) (0,15+0,15p); b) pentru teorema împărțirii cu rest se acordă (0,20p), finalizare (0,25p).

Subiectul III: (3p) repartizate astfel:

- 1) figura (0,25p), $AB = BC/2$ (0,25p), finalizare (0,25p)
- 2) a) figura (0,25p), aria (0,20p), volumul (0,20p), diagonala (0,10p); b) 0,25p; c) 0,25p
- 3) a) figura (0,25p), $R + r = 10$ cm (0,25p); $R - r = 6$ cm (0,10p), finalizare (0,15p); b) 0,25p.

CONCURSUL DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea iulie 1997

SUBIECTE:

I. 1. Calculați: $8 - 8 : 2 + 10^0 + 0,2 - \frac{1}{5}$.

2. Efectuați: $\frac{1}{2}\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$ și aproximați cu o zecimală prin adaos rezultatul găsit.

3. După ce în prima zi a cheltuit $\frac{1}{3}$ din suma pe care o avea, iar a doua zi 1500 lei, unui elev i-a rămas 25% din suma totală. Ce sumă a avut inițial elevul ?

II. 1. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 10 \leq 6(1 - x)\} \text{ și } B = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{3x+5}{x+1} \in \mathbf{Z}\right\}$$

Determinați $A \cap B$, $B \setminus A$.

2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\sqrt{3}x - 2$. a) Reprezentați grafic funcția;
b) Calculați măsura unghiului făcut de dreapta absciselor cu dreapta ce reprezintă graficul funcției.

3. Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care fracția $\frac{X^3 - X}{X^2 + aX - a}$ este simplificabilă printr-un polinom de gradul I.

III.1. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral de latură $2\sqrt{3}$ cm. Calculați suma distanțelor de la punctul M la laturile triunghiului.

2. Se consideră piramida patrulateră regulată VMNPQ cu latura bazei $MN = 10$ cm și înălțimea $VO = 5\sqrt{2}$ cm. Să se determine:

- aria laterală și volumul piramidei;
- poziția punctului T pe muchia VN, pentru care $MT + PT$ este minimă și valoarea acestui minim.

3. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu bazele de 6 cm și 18 cm și cu diagonalele perpendiculare. Aflați:

- aria laterală și volumul trunchiului;
- volumul conului din care provine trunchiul de con.

Barem de corectare și notare:

- I. 1. $1. 8 : 2 = 4$ (0,25p), $10^0 = 1$ (0,25p), finalizarea (0,50p).
2. $\frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$ (0,25p), $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (0,20p), $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (0,20p),
 $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (0,15p), $4\sqrt{2} \approx 5,7$ (0,20p).
3. $x - \frac{1}{3}x - 1500 = 25\% \cdot x$ (0,50p), $x = 3600$ lei (0,50p).
- II. 1. $A = \{0, 1, 2\}$ (0,25p), $\frac{3x+5}{x+1} = 3 + \frac{2}{x+1}$ (0,15p), $x+1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$ (0,15p),
 $B = \{-3, -2, 0, 1\}$ (0,15p), $A \cap B = \{0, 1\}$ (0,15p), $B \setminus A = \{-3, -2\}$ (0,15p).
2. a) $\cap O_x$ (0,20p), $\cap O_y$ (0,20p), desenul dreptei (0,10p).
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ (0,25p), $\alpha = 60^\circ$ (0,25p).
3. $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ (0,40p), conform teoremei lui Bezout $-1, 0$ sau 1 sunt rădăcini ale numitorului (0,30p), finalizarea (0,30p).
- III. 1. Desenul (0,15p), $S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = S_{ABC}$ (0,20p), finalizarea (0,40p).
2. a) Desenul (0,15p), $ap = 5\sqrt{3}$ cm (0,20p), A_{lat} (0,20p), Vol (0,20p)
b) $VN \perp (MTP)$ (0,15p), VMN echilateral (0,15p), $VT = NT$ (0,10p),
minimul $= 10\sqrt{3}$ cm (0,10p).
3. a) Desenul (0,15p), $h_{tr} = 12$ cm (0,10p), $g = 6\sqrt{3}$ cm (0,15p), A_{lat} (0,10p), V_{tr} (0,10p).
b) $h_c = 18$ cm (0,30p), $V_c = 486\pi$ cm³ (0,10p).

NOTĂ: fiecare lucrare primește un punct din oficiu.

CONCURSUL DE ADMITERE ÎN CLASA A IX-A DE LICEU

Sesiunea august 1997

SUBIECTE

I. 1. Efectuați:

a) $-2^2 + |-2| - 2^0 + \sqrt{5^2 - 3^2}$;

b) $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} : 1\frac{1}{5}$;

c) $\left[(\sqrt{3} - 2)(2 + \sqrt{3}) \right]^{1997}$.

2. Să se rezolve:

a) $3x - \left(\frac{1}{2} + x \right) = 0$;

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$;

c) $|(x-2)(x-3)| + |2x-4| \leq 0$.

II. 1. a) Să se efectueze funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbf{R}$, al cărei grafic intersectează axele de coordonate în punctele $A(0, 2)$ și respectiv $B(2, 0)$.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x + 2$ și apoi, să se afle valorile reale ale lui x pentru care $|f(x)| \leq 5$.

2. Se dă expresia: $E(x) = \left(\frac{1-2x}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-1} \right) : \frac{x^3-1}{x+1}$.

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

b) Să se precizeze valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens;

c) Să se determine mulțimea $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid E(x) \in \mathbf{Z}\}$.

III.1. Se dă un trapez isoscel cu baza mare de 5 cm, baza mică de 3 cm și laturile oblice de câte 2 cm. Să se determine: a) aria trapezului; b) raza cercului circumscris acestui trapez.

2. Secțiunea axială a unui con este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Să se determine: a) aria totală și volumul conului; b) măsura unghiului sectorului de cerc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are ariile bazelor de 100cm^2 și respectiv 36cm^2 , iar lungimea muchiilor laterale de câte $10\sqrt{2}\text{cm}$. Se cere: a) aria laterală și volumul trunchiului; b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul; c) distanța de la centrul bazei mari la planul unei fețe laterale a trunchiului.

NOTĂ: Fiecare lucrare primește un punct din oficiu.

Barem de corectare și notare:

- I. 1. a) Calculul termenilor (0,40p), finalizare(0,10p);
 b) Împărțirea (0,25p), scăderea (0,25p);
 c) Calculul din paranteza dreaptă (0,30p), finalizarea (0,20p).
2. a) Găsirea valorii lui x (0,50p);
 b) Aflarea soluției sistemului (0,50p);
 c) Aflarea corectă a soluției (cu justificare) (0,50p).
- II. 1. a) Determinarea funcției (0,50p);
 b) Reprezentarea grafică (0,50p), $|-a + 2| \leq 5$ și finalizarea (0,50p).
2. a) Efectuarea calculelor din paranteză (0,40p), simplificare și rezultat final (0,35p);
 b) Precizarea valorilor lui x (0,25p);
 c) Determinarea mulțimii M (0,25p).
- III. 1. a) Calculul înălțimii trapezului (0,25p), aflarea ariei trapezului(0,25p);
 b) Determinarea razei (0,50p).
2. a) Aria totală (0,25p), volumul (0,25p);
 b) Determinarea unghiului sectorului circular (0,25p).
3. a) Determinarea apotemei trunchiului (0,15p), determinarea înălțimii trunchiului (0,15p), aria laterală (0,20p), volumul (0,20p);
 b) Găsirea înălțimii piramidei din care provine trunchiul (0,30p);
 c) Determinarea distanței de la centrul bazei mari la planul unei fețe laterale (0,50p).

SOLUȚII

TEST NR. 1

- I. 1. 4^c este număr impar $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow 8(2^a + 11b) + 1 = 609 \Rightarrow 2^a + 11b = 76 \Rightarrow 2^a < 76 \Rightarrow a \leq 6$; convine numai $a = 5 \Rightarrow 32 + 11b = 76 \Rightarrow b = 4$.

$$2. \frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \frac{b}{3} = \frac{c}{5}; \frac{c}{5} = \frac{d}{7} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{d}{7} = k, k > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 5k \\ d = 7k \end{cases} \text{ Observăm că } b-a=k;$$

$$\begin{cases} b-a \in \mathbb{Z} \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \mathbb{N}^*. abcd = 17\ 010 \Rightarrow 2k \cdot 3k \cdot 5k \cdot 7k = 17\ 010 \Rightarrow k^4 = 81 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6, b = 9 \\ c = 15, d = 21 \end{cases}$$

$$3. \sqrt{17 - \sqrt{n}} = a, a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 17 - \sqrt{n} = a^2 \Rightarrow 17 = a^2 + \sqrt{n} \Rightarrow a^2 < 17 \Rightarrow a^2 \in \{16, 9, 4, 1\};$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{n} = 1 \Rightarrow n = 1; a^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{n} = 8 \Rightarrow n = 64; a^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{n} = 13 \Rightarrow n = 169;$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = 16 \Rightarrow n = 256 \Rightarrow A = \{1, 64, 169, 256\}.$$

II. 1. $a = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}; b = 3\sqrt{5^{2n+2}} \cdot 5^{2n+1} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}; b-a = 4\sqrt{3}; (b-a-\sqrt{12})^p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2\sqrt{3})^p \in \mathbb{N} \\ p \text{ minimum}, p \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow p = 2.$$

$$2. \sqrt{62 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{62 + \sqrt{2400}} = \sqrt{50} + \sqrt{12} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, a = 62; b = 2400;$$

$$c^2 = 62^2 - 2400 = 3844 - 2400 = 1444 \Rightarrow c = 38. 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}, a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5-a)\sqrt{2} = \sqrt{3}(b-2) \mid \sqrt{3} \Leftrightarrow (5-a)\sqrt{6} = 2(b-2); \text{ dacă } 5-a \neq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{6} = \frac{3(b-2)}{5-a}$$

$$\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (F) \Rightarrow 5-a=0 \text{ și } b-2=0 \Rightarrow a=5; b=2 \Rightarrow \overline{ab} = 52; 52 = M_2, 52 \neq M_3,$$

$$\frac{3(b-2)}{5-a} \in \mathbb{Q}$$

$$52 \neq M_6.$$

$$3. f(x) = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}x + \frac{b(\sqrt{3}+1)}{2}; M(\sqrt{3}-1; 3) \in G_f \Leftrightarrow f(\sqrt{3}-1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$a(3-2\sqrt{3}+1) + b(\sqrt{3}+1) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3}(b-2a) = 6-4a-b; \text{ dacă } b-2a \neq 0$$

$$\sqrt{3} = \frac{6-4a-b}{b-2a}$$

$$\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\frac{6-4a-b}{b-2a} \in \mathbb{Q}$$

$$(F) \Rightarrow b-2a=0 \Rightarrow 6-4a-b=0.$$

$$\begin{cases} b-2a=0 \\ -b-4a=-6 \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ și } b=2 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}; \text{ fie } P(x_0, y_0) \in G_f, x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) = y_0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot x_0 + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = y_0 \Rightarrow \sqrt{3}x_0 - x_0 + 2\sqrt{3} + 2 = 2y_0 \Rightarrow \sqrt{3}(x_0+2) = 2y_0 + x_0 - 2;$$

$$\sqrt{3} = \frac{2y_0 + x_0 - 2}{x_0 + 2}$$

$$\text{dacă } x_0 + 2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

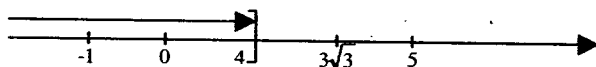
$$\frac{2y_0 + x_0 - 2}{x_0 + 2} \in \mathbb{Q}$$

$$(F) \Rightarrow x_0 + 2 = 0 \text{ și } 2y_0 + x_0 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(-2, 2).$$

III. 1. $\frac{(x-3\sqrt{3})^2(x-4)(x-5)^2}{x^2\sqrt{(x+1)^2}} \leq 0, x \neq 0; x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; x^2 > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}^*;$

$$|x+1| > 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. (x-3\sqrt{3})^2 \geq 0; (x-5)^2 \geq 0 \Rightarrow x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4].$$

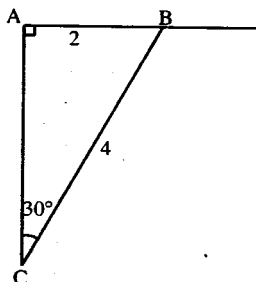
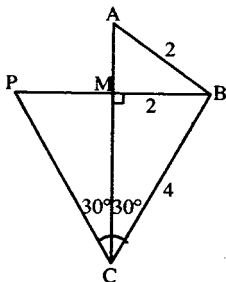


$$x \in ((-\infty, 4] \setminus \{-1, 0\}) \cup \{3\sqrt{3}, 5\}$$

2. a) Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd că $\triangle ABC$ este dreptunghic în A. Presupunem că $m(\angle CAB) \neq 90^\circ$. Fie P simetricul lui B față de AC. $\triangle PCB$ isoscel cu $m(\angle PCB) = 60^\circ \Rightarrow \triangle PCB$ echilateral $\Rightarrow PB = 4 \text{ cm} \Rightarrow MB = 2 \text{ cm}$.

În $\triangle AMB$: $MB = AB$ (F)

$$AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



b) Unghiul drept $\angle BAC$ se proiectează după unghiul drept $\angle B'A'C'$. Atunci avem 2 cazuri:

1) $AB \parallel \alpha \Rightarrow AB = A'B'$ și $AB \parallel A'B' \Rightarrow$

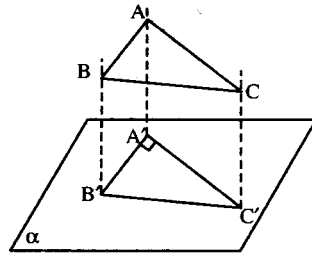
$$\Rightarrow A'B' = 2 \text{ cm} \Rightarrow \frac{A'B' \cdot A'C'}{2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot A'C' = 6 \Rightarrow A'C' = 3 \Rightarrow B'C' = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

$$S' = S \cdot \cos u \Leftrightarrow \cos u = \frac{S'}{S} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 30^\circ \Rightarrow \angle((ABC), \alpha) = 30^\circ.$$

2) Dacă $AC \parallel \alpha \Rightarrow A'C' = AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow A'B' = \sqrt{3} \Rightarrow B'C' = \sqrt{15}.$

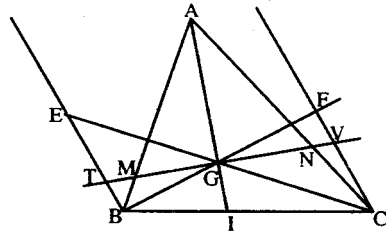


III. 3. Fie $MN \cap (BE) = \{T\}$ și $MN \cap (CF) = \{V\}$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BT}{AG}; \quad \frac{NC}{NA} = \frac{CV}{AG}$$

În trapezul $TBCV$: GI este linie mijlocie \Rightarrow
 $\Rightarrow BT + CV = 2 \cdot GI$

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{BT}{AG} + \frac{CV}{AG} = \frac{2GI}{AG} = 1 \text{ c.c.t.d.}$$



b) Se demonstrează ușor că $\frac{1}{GI} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}$. Folosim inegalitatea $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)(BE + CF) \geq 4 \Rightarrow BE + CF \geq \frac{4}{\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}} \Leftrightarrow BE + CF \geq \frac{4}{\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}} = 4GI$$

Egalitatea ar avea loc dacă $a = b \Leftrightarrow \frac{1}{BE} = \frac{1}{CF} \Rightarrow BE = CF \Rightarrow BCFE$ paralelogram de centru G și EF este o paralelă dusă la BC prin mijlocul lui AG .

TEST NR. 2

I. 1. 57 002;

2. $27 + 10\sqrt{2} = (5 + \sqrt{2})^2$; $27 - 10\sqrt{2} = (5 - \sqrt{2})^2$, deci numărul:

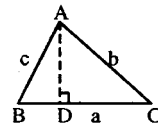
$$\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = 5 + \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 10$$

II. 1. $x = 3 - \frac{10}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\} \Rightarrow n \in \{0, 2, -3, -1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \{-7, 1, 5, 13\}.$$

2. Deosebim trei cazuri:

a) Dacă $m(\angle B) < 90^\circ$ atunci $BD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$



b) Dacă $m(\angle B) = 90^\circ$ atunci $BD = 0$

c) Dacă $m(\angle B) > 90^\circ$ atunci $BD = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a}$.

III. 1. $V = 512\sqrt{3}$

2. Notând cu d distanța cerută rezultă: $\left(\frac{d}{5}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow d^3 = \frac{125}{2} \Rightarrow d = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$.

TEST NR. 3

I. 1. a) 3; b) $a + b = 6$, $\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{90}} = \frac{a+b}{\frac{1}{3} + \frac{1}{90}} = \frac{a+b}{\frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow a = 4; b = 2$. 2. $x = y = 1$.

II. 1. $\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}$; 2. $P(X) = (X^3 + 3) \cdot C(X) + C^2(X)$. Deoarece $\text{grad } C^2(X) < \text{grad } (X^3 + 3) = 3$ rezultă $C(X) = aX + b$. Obținem: $2(-a + b) + (-a + b)^2 + 4(a + b) + (a + b)^2 + 5 = 0$ sau $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$. De aici $a = -1/2$; $b = -3/2$, iar $R(X) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{9}{4}$.

III. 1. a) $A_{\text{lat}} = 100\sqrt{2} \text{ cm}^2$; $V = \frac{500}{3} \text{ cm}^3$.

b) $\angle VMO$ este unghiul plan asociat și $m(\angle VMO) = 45^\circ$. c) $PV = 7,5 \text{ cm}$.

2. a) $A_t = 2\pi\sqrt{2}(\sqrt{2} + 4) \text{ cm}^2$; $V = 8\pi \text{ cm}^3$. b) unghiul cerut are 60° .

TEST NR. 4

I. 1. a) 5; b) $\frac{27}{19}$; c) 18.

2. $A = \{0, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{0, 2, 6\}$; $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $A \cap B = \{0, 2\}$, $A \setminus B = \{3, 4, 7\}$.

II. 1. Ecuația se scrie $m(1 - m)x = 1 - m$.

Dacă $m \neq 0$ și $m \neq 1$ ecuația admite soluția $x = 1/m$.

Dacă $m = 0$ ecuația nu admite soluții.

Dacă $m = 1$ ecuația are soluții orice număr real.

2. Inegalitatea se scrie: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ și după calcule și reducerea termenilor asemenea devine: $(ay - bx)^2 \geq 0$.

III. 1. Aria cerută este 2000 cm^2 .

2. a) $\triangle ADB \equiv \triangle CDB$ (fiind chiar triunghiuri isoscele)

b) Din $\triangle ADB$ cu ajutorul ariilor se calculează $AM = a \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 2b^2)}$. Cum $AM \equiv MC$

din triunghiul isoscel AMC putem calcula $MO = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$. Deoarece MO este

$$\text{înălțime în } \Delta AMC \text{ obținem } S_{\Delta AMC} = \frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

TEST NR. 5

I. 1. $a = \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3}\right)^{-1} - (8-3) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{3}\right)^{-1} + \frac{40}{7} = \left(\frac{7}{6}\right)^{-1} + \frac{40}{7} = \frac{6}{7} + \frac{40}{7} = \frac{46}{7} = 6\frac{4}{7}$

$$[a] = 6$$

$$2. p = 11; \overline{bb} = 66, A = \{1, 2, 3, 6, 11, 66, 22, 33\}$$

$$3. \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{d} = k, k > 0, a > 0, a < b < c, \begin{cases} a = 4k & b - a = k \\ b = 5k \Rightarrow b - a \in \mathbb{Z} \\ c = dk & b > a \end{cases} \Rightarrow k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ b \geq 5 \\ c \geq d \end{cases}$$

$$a < b < c \Rightarrow 4k < 5k < dk \Rightarrow d > 5 \Rightarrow d \geq 6 \quad (1)$$

$$c^2 \leq (2b-a)^2 \Leftrightarrow d^2 k^2 \leq (6k)^2 \Leftrightarrow d^2 k^2 \leq 36k^2 \Rightarrow d \leq 6 \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow d = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b = 5k, a + c = 10k \\ c = 6k \end{cases}$$

$$10k \text{ ----- } 100\%$$

$$5k \text{ ----- } x \Rightarrow x = 50\%.$$

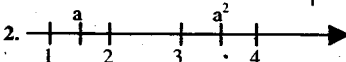
II. 1. $\frac{a\sqrt{3}+b}{\sqrt{3}-1} = p, p \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{(a\sqrt{3}+b)(\sqrt{3}+1)}{2} = p \Leftrightarrow 3a + a\sqrt{3} + b\sqrt{3} + b = 2p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(a+b) = 2p - 3a - b.$$

$$\sqrt{3} = \frac{2p-3a-b}{a+b}$$

$$\text{Dacă } a+b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (F) \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \left(\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^{19980} = 1.$$

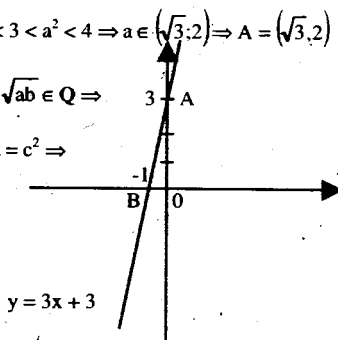
$$\frac{2p-3a-b}{a+b} \in \mathbb{Q}$$

2.  $1 < a < 2 < 3 < a^2 < 4 \Rightarrow a \in (\sqrt{3}, 2) \Rightarrow A = (\sqrt{3}, 2)$

$$3. 7\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = c\sqrt{3} \Rightarrow 49a + 4b + 28\sqrt{ab} = 3c^2 \Rightarrow \sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=b \Rightarrow 49a + 4a + 28a = 3c^2 \Rightarrow 81a = 3c^2 \Leftrightarrow 27a = c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9 \cdot 3a = c^2}{a \in M_3} \Rightarrow a=3, b=3 \Rightarrow f(x) = 3x+3.$$



III. 1. $MT \parallel NR \Rightarrow M, N, T, R$ coplanare

Fie $\beta = (M, N, T)$

$MN \parallel \alpha$

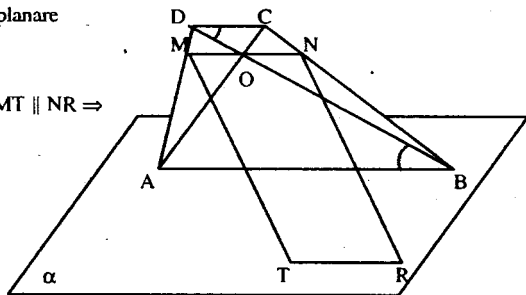
$MN \subset \beta$

$\alpha \cap \beta = TR$

$\left. \begin{array}{l} MN \parallel \alpha \\ MN \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = TR \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel TR \text{ și } MT \parallel NR \Rightarrow$

$\Rightarrow MNRT$ paralelogram \Rightarrow

$\Rightarrow [MN] \equiv [TR]$



$$MN = \frac{2AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 4}{16} = 6 \text{ cm}.$$

2. a) Fie mediana (AM) $\Rightarrow AM = MB = MC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMB$ isoscel $\Rightarrow m(\angle AMB) = 150^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle AMD) = 30^\circ.$

$$\text{În } \triangle ADM: AD = \frac{AM}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$VA \perp (ABC)$

$AD \perp BC$

$BC \subset (ABC)$

$\left. \begin{array}{l} VA \perp (ABC) \\ AD \perp BC \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow T3 \perp \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow$

$BC \perp (VAD)$

$BC \subset (VBC)$

$\Rightarrow (VBC) \perp (VAD)$

Dar $(VBC) \cap (VAD) = AD$

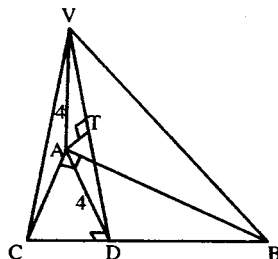
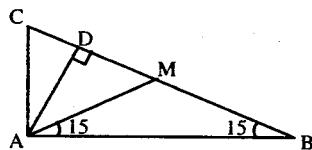
Fie $AT \perp AD$

$\left. \begin{array}{l} BC \perp (VAD) \\ BC \subset (VBC) \\ \text{Dar } (VBC) \cap (VAD) = AD \\ \text{Fie } AT \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \perp (VBC) \Rightarrow d(A; (VBC)) = AT$

$$\triangle VAD: VD = 4\sqrt{2} \Rightarrow AT = \frac{4 \cdot 4}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) $\angle((VBC); (ABC)) = \angle VDA$ și $m(\angle VDA) = 45^\circ.$



TEST NR. 6

I. 1. $x = 3 - \frac{10}{2n+1}$, cum $x \in \mathbb{Z}$, rezultă $2n+1 \mid 10 \Rightarrow (2n+1) \in \{-5, -1, 1, 5\}$, deci

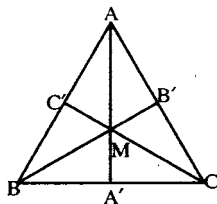
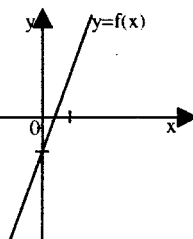
$$n \in \{-6, -1, 0, 2\} \Rightarrow A = \{-7, 1, 5, 13\}$$

$$2. (2,5 \cdot 10^3 + 32 : 10^{-2}) : 10^{-1} + \sqrt{(-2)^2} = \left(2500 + 32 : \frac{1}{100} \right) : \frac{1}{10} + \sqrt{4} =$$

$$= (2500 + 3200) \cdot 10 + 2 = 57000 + 2 = 57002.$$

$$3. \text{ a) } (x-1)^2 - y^2 = (x-y-1)(x+y-1); \text{ b) } 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$$

II. 1. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \leq 2x+1 \\ 2x+1, & 2x-1 > 2x+1 \end{cases}$. deci $f(x) = 2x-1 \ (\forall) x \in \mathbb{R}$



2. $A_{[ABC]} = A_{[MBC]} + A_{[MCA]} + A_{[MAB]} \quad (1)$

Notăm h – înălțimea triunghiului și cu „ a ” latura triunghiului, atunci din (1) rezultă:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot MA'}{2} + \frac{a \cdot MB'}{2} + \frac{a \cdot MC'}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h = MA' + MB' + MC'$, deci suma distanțelor din interiorul $\triangle ABC$ echilateral la laturi este egală cu înălțimea triunghiului

echilateral. Dar $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ deci $A_{[ABC]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

3. Fie BD' = diagonala considerată și $B'C'$ indicată în problemă. B

Deoarece $B'C' \parallel (BA'D')$ pentru că $B'C' \parallel A'D' \Rightarrow$

$\Rightarrow d(B'C', (BA'D')) =$ lungimea perpendiculei coborâte dintr-un punct oarecare al dreptei $B'C'$ pe planul $(BA'D')$.

Fie $B' \in (B'C')$ din: $B'A' \perp A'D'$, $BA' \perp A'D'$ și $BO_1 \perp A'D'$ și $BO_1 \perp A'B$ ($ABB'A' =$ pătrat) \Rightarrow

$\Rightarrow B'O_1 \perp (BA'D')$.

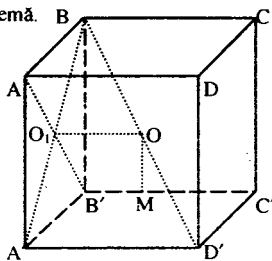
Construim $O_1O \parallel A'D' \Rightarrow O_1O \parallel B'C' \ (O \in (BD'))$.

Construim $OM \parallel O_1B' \ (M \in (B'C')) \Rightarrow$

$\Rightarrow OM \perp B'C'$, $OM \perp (BA'D')$.

Din $OM \perp BD'$ și $OM \perp B'C' \Rightarrow OM$ reprezintă distanța de la dreapta $B'C'$ la dreapta BD' .

Dar O_1OMB' paralelogram $\Rightarrow OM = BO_1 = \frac{m\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$.



III. a) $A_{[SAB]} = A_{[SAC]} = 24 \text{ cm}^2 \quad (1)$

$A_{[BAC]} = 32 \text{ cm}^2 \quad (2)$

Fie $AM \perp BC$, atunci $AM = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

Din $SA \perp (ABC)$ și $AM \perp BC \Rightarrow SM \perp BC$.

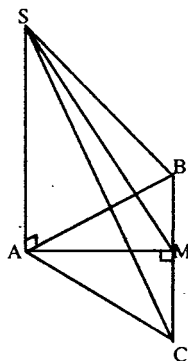
Din $\triangle SAM$ dreptunghic $\Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2$, deci $SM = 2\sqrt{17}$.

deci $A_{[SBC]} = \frac{BC \cdot SM}{2} = 16\sqrt{34} \quad (3)$

Din (1), (2) și (3) se obține $A_t = 80 + 16\sqrt{34} = 16(5 + \sqrt{34}) \text{ cm}^2$.

b) $\lg \angle AMS = \frac{AS}{AM} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $V = \frac{1}{3} A_{[ABC]} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 6 = 64 \text{ cm}^3$.



TEST NR. 7

$$\text{I. } 1. (1, (3) + 1, (6)) \cdot 0, (3) + \sqrt{6,25} : \frac{5}{2} = \left(1\frac{3}{9} + 1\frac{6}{9}\right) \cdot \frac{3}{9} + 2,5 \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{12}{9} + \frac{15}{9}\right) \cdot \frac{1}{3} + 1 = \\ = \frac{27}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

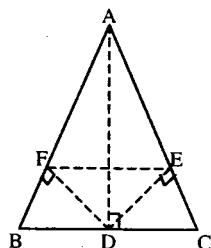
$$2. \left| |x-1| + 2 \right| - 3 = \begin{cases} |x+1| - 3, x \geq 1 \\ -x + 3 - 3, x < 1 \end{cases} = \begin{cases} |x-2|, x \geq 1, x \geq -1 \\ -x-4, x \geq 1, x < -1 \\ -x, x < 1, x \leq 3 \\ |x-6|, x < 1, x > 3 \end{cases} = \begin{cases} |x-2|, x \geq 1 \\ -x, x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2, x \geq 1, x \geq 2 \\ -x+2, x \geq 1, x < 2 \\ -x, x \leq 0, x \leq 1 \\ x, x > 0, x \leq 1 \end{cases} ; |x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ 1-x, x < 1 \end{cases} \text{ și } |x-2| = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ 2-x, x < 2 \end{cases}$$

$$\text{deci } \left| |x-1| + 2 \right| - 3 = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ 2-x, x \in (2, 1] \\ -x, x \leq 0 \\ x, x \in (0, 1) \end{cases}$$

- II. 1. $\triangle ABC = \triangle$ isoscel $\Rightarrow AD \perp BC$
Din $\triangle ADF \cong \triangle ADE \Rightarrow [AF] \equiv [AE] \Rightarrow [BF] \equiv [CE]$
și aplicând reciproca T. Thales $\Rightarrow EF \parallel BC$.
Deci BFEC = trapez isoscel.

$$2. x = \frac{2n+7}{n+1} = \frac{2(n+1)+5}{n+1} = 2 + \frac{5}{n+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow n+1 \in \{1, 5\} \Rightarrow \{3, 7\}$$



III. 1. $A_1 = 36\pi$; $V = 16\pi$.

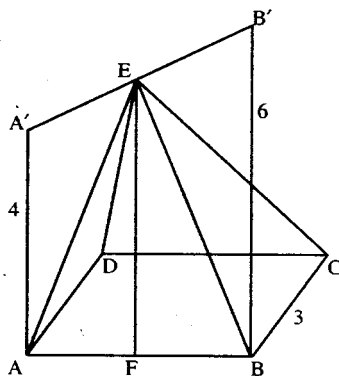
2. $A'ABB' =$ trapez $\Rightarrow EF =$ linie mijlocie \Rightarrow

$$\Rightarrow EF = \frac{AA' + BB'}{2} \Rightarrow EF = 5.$$

$(ABB'A') \perp (ABCD) \Rightarrow EF \perp (ABCD) \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ înălțimea piramidei EABCD.

$$V_{EABCD} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot EF = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 5 = 15.$$



TEST NR. 3

I. $1. 3 - 5^{-2} \cdot 75 + 10^0 + \sqrt{0,64} = 3 - \frac{1}{25} \cdot 75 + 1 + 0,8 = 1,8.$

2. $A = \{3, 4, 5, 6\}; B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$

3. $P(X) = (X - 1) \cdot Q(X) + R$, unde $Q(X) = X^2 - X + 1, R = 2.$

- II. 1. Se știe că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente, deci $(BT_1) \equiv (BT_2),$

$(CT_2) \equiv (CT_3)$ și $(AT_1) \equiv (AT_3)$ (1)

Fie O centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ dreptunghic și T_1, T_2 și T_3 punctele de tangență, atunci patrulaterul

OT_1AT_3 este pătrat: $OT_1 = OT_3 = r$ și $m(\angle OT_1A) =$

$= m(\angle T_1AT_3) = m(\angle AT_3O) = 90^\circ,$

deci $AT_1 + AT_3 = 2r.$ (2)

Diametrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic

este $[BC]$, deci $BC = BT_2 + CT_2 = 2R$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow AB + AC = 2R + 2r.$

2. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} \Rightarrow x = 15, y = 20, z = 25.$

3. $E(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ cu condițiile $x \neq \pm y.$

- III. a) Din triunghiul dreptunghic isoscel AOB , cu $(OA) \equiv (OB)$

se obține $AB = 8\sqrt{2}$ cm.

Din $\left. \begin{array}{l} CO \perp OA \\ CO \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow CO \perp (OAB), \text{ fie } OM \perp AB,$

atunci $CM \perp AB$ (conform T.3.L).

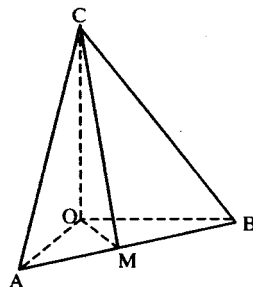
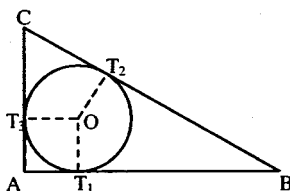
Din $\triangle AOB$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow OM = \frac{OA \cdot OB}{AB} = 4\sqrt{2}.$

Din $\triangle COM \Rightarrow CM = 4\sqrt{6}.$

$A_{\triangle ABC} = \frac{CM \cdot AB}{2} = \frac{4\sqrt{6} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2.$

b) $A_{[AOB]} = A_{[AOC]} = A_{[BOC]} = 32 \text{ cm}^2. A_t = 3 \cdot 32 + 32\sqrt{3} = 32(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$

c) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot 8 = \frac{256}{3} \text{ cm}^3.$



TEST NR. 9

- I. 1. Problema are următoarele soluții:

a) $X = \{3, 4, 6, 7\}; Y = \{3, 4, 5\}$

b) $X = \{3, 4, 5, 6\}; Y = \{3, 4, 7\}$

c) $X = \{3, 4\}; Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

2. $E(X) = (X - 1)(X - 3)(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$

3. $12x - 31 + 14x - 61 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ și $4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3/2$ soluția ecuației.

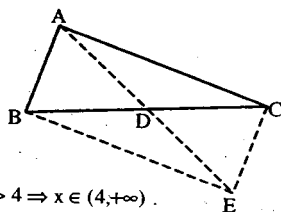
II. 1. Prelungim (AD cu segmentul (DE) \equiv (AD).

Din faptul că (BD) \equiv (DC) și (AD) \equiv (DE),

rezultă ABEC = paralelogram \Rightarrow (AB) \equiv (EC).

Din $\triangle AEC$, rezultă că $AE < AC + EC$, dar $AE = 2AD$,

$$CE = AB, \text{ deci } AD < \frac{AB + AC}{2}.$$



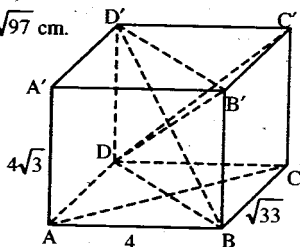
$$2. \frac{4-x}{x^2+4x+5} < 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{(x+2)^2+1} < 0 \Leftrightarrow 4-x < 0 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4, +\infty).$$

$$3. X^2 + Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0 \Leftrightarrow (X^2 + 2X + 1) + (Y^2 + 2Y + 1) = 0 \Leftrightarrow (X+1)^2 + (Y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow X+1=0 \text{ și } Y+1=0 \Leftrightarrow X=-1 \text{ și } Y=-1.$$

$$\text{III. a) } d = BD' = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AA'^2} = \sqrt{16 + 33 + 48} = \sqrt{97} \text{ cm.}$$

$$\text{c) } V = 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{33} = 48\sqrt{11} \text{ cm}^3.$$

$$\text{d) } A_1 = 2(4 \cdot 4\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{33} + 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{33}) = 8(4\sqrt{3} + \sqrt{33} + 3\sqrt{11}) \text{ cm}^2.$$



TEST NR. 10

- I. 1. Notăm cu $a = \frac{11111...1}{n}$ și se compară numerele $\frac{7a-2}{7a+1}$ și $\frac{8a-3}{8a+1}$ făcând diferența lor.

$$\frac{7a-2}{7a+1} - \frac{8a-3}{8a+1} = \frac{4a+1}{(7a+1)(8a+1)} > 0 \Rightarrow \frac{7777...75}{7777...78} > \frac{8888...85}{8888...89}.$$

$$2. 1 - \frac{1}{2} \cdot (0.1 \cdot 10^2 - \sqrt{81}) : 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} (10 - 9) : \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

$$3. \text{Pentru } x \neq 3 \text{ și } y \neq -1 \text{ sistemul este } \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = x+3 \\ 3x+2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -2 \\ 3x+2y = 9 \end{cases} \text{ cu soluția } (1; 3).$$

4. Presupunem că numărul este rațional, deci există $x \in \mathbb{N}^*$ așa încât $x^2 = n + \sqrt{n+1}$. Rezultă că există $y \in \mathbb{N}^*$ așa încât $y^2 = n + 1$ deci $n = y^2 - 1$. Și obținem $x^2 = y^2 - 1 + y$. Din $y^2 < y^2 + y - 1 < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \Rightarrow y^2 < x^2 < (y+1)^2$ ceea ce constituie un fals.

Așadar presupunerea este falsă, rezultă că $\sqrt{n + \sqrt{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

- II. 1. Se obține ecuația: $\frac{10x+y}{10y+x} = 2 - \frac{y}{x}$ sau $(x-y) \cdot (4x-5y) = 0$. Rezultă soluțiile: $(x; x)$ sau

$$x = 5 \text{ și } y = 4.$$

2. Știm că: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$ și adunând în ambii membri pe $x^2 + y^2 + z^2$ obținem: $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \leq 3$, adică: $|x+y+z| \leq \sqrt{3}$.

3. AD = mediană, GF || AD

În $\triangle ABD$; GE || AD \Rightarrow conform T. Thales că $\frac{AE}{AB} = \frac{GD}{BD}$ (1)

În $\triangle GCF$; GF || AD \Rightarrow conform T. Thales că $\frac{AF}{AC} = \frac{GD}{DC}$ (2)

$$(1) : (2) \Rightarrow \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

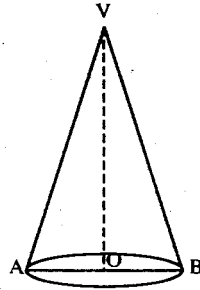
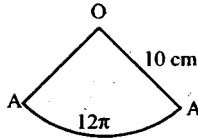
III. a) Din problemă rezultă: R = 6; h = 8; G = 10 elementele

$$\text{conului. } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 96\pi \text{ cm}^3.$$

$$b) A_l = \pi R G, A_l = 60\pi \text{ cm}^2.$$

c) Prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un sector de cerc cu raza de 10 cm și lungimea arcului (AA') este egală cu $2\pi R = 12\pi$. Folosind regula de trei simplă se obține:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ ————— } 20\pi \\ x^\circ \text{ ————— } 12\pi \\ x^\circ = \frac{360 \cdot 12\pi}{20\pi} = 216^\circ. \end{array}$$



TEST NR. 11

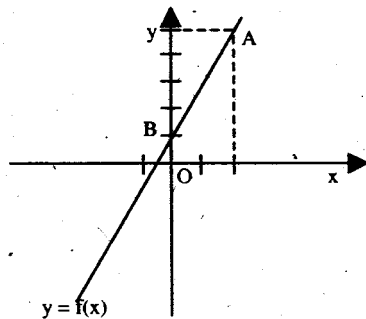
$$I. 1. a) \left(0,001 : \frac{1}{20} + \sqrt{0,0064} \right) (3^2 + 1^0) = \left(\frac{1}{1000} \cdot \frac{20}{1} + \sqrt{\frac{64}{10000}} \right) (9+1) = \left(\frac{1}{50} + \frac{4}{50} \right) \cdot 10 = 1$$

$$b) (1+a)^2 - (1-a)^2 = 4a$$

$$2. f(x) = 2x + m, \text{ din condiția } A(2, 5) \in G_f \Rightarrow 5 = 4 + m \Rightarrow m = 1.$$

$$f(x) = 2x + 1, B(0; 1), A(2; 5) \in G_f$$

$$\begin{aligned} 3. \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{1 - 2x + x^2} &= 2, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x - 1| + |x - 1| &= 2 \Leftrightarrow 2 \cdot |x - 1| = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x - 1| &= 1 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 1, x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$



II. 1. Din $p > 3$, prim rezultă $p = 2k + 1, k > 1$.

Rezultă $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8f + 1$, deci restul împărțirii lui p^2 la 8 este 1. Din p prim, rezultă că p poate fi de forma: $p = 3k + 1$ sau $p = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ deci $p^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ sau $p^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ și deci $p^2 - 1 : 3$. Așadar $p^2 - 1 : 24$ deci restul împărțirii lui p^2 la 24 este 1.

$$2. P(b) = 3b^2 - 3ab + a^2 = 3(b^2 - ab) + a^2 = 3\left(b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b + \frac{a^2}{4}\right) + a^2 - \frac{3a^2}{4} =$$

$$= 3\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \geq 0. \text{ Egalitatea are loc pentru } a = 0 \text{ și}$$

$b = 0.$

3. Fie I punctul de intersecție al laturilor neparalele ale trapezului, P și Q intersecția dreptei OI cu bazele. Ducem prin O paralela EF la bazele trapezului. Avem

egalitățile: $\frac{EO}{AB} = \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} = \frac{OF}{AB}$ deci $EO = OF.$

Avem de asemenea egalitățile: $\frac{AP}{EO} = \frac{IP}{IO} = \frac{PB}{OF}$ de

unde rezultă $AP = PB$ (deoarece $EO = OF$), adică P este

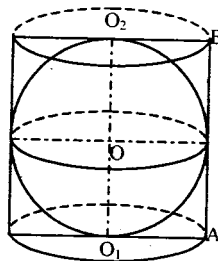
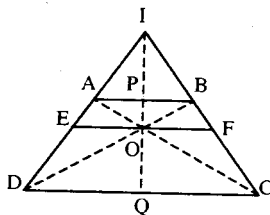
mijlocul lui (AB). Apoi avem: $\frac{EO}{DQ} = \frac{IO}{IQ} = \frac{OF}{QC}$ deci

$DQ = QC$, adică Q este mijlocul lui (CD).

III. a) Lungimea razei cilindrului este de 3 cm, iar lungimea G a generatoarei cilindrului este de 6 cm. Lungimea razei sferei înscrise de 3 cm.

$$A_k = 2\pi R(R + G), A_k = 54\pi \text{ cm}^2; \quad V_{cil} = \pi R^2 h, V = 54\pi \text{ cm}^2$$

$$b) V_{sf} = \frac{4\pi R^3}{3}, V_{sf} = 36\pi \text{ cm}^3, \quad \frac{V_{sf}}{V_{cil}} = \frac{2}{3}.$$



TEST NR. 12

I. 1. $E = 3 \cdot 5 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n} = 15 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n} = (17 - 2) \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n} = 17 \cdot 5^{2n} - 2(5^{2n} - 2^{3n}) =$

$$= 17 \cdot 5^{2n} - 2(25^n - 8^n) = 17 \cdot 5^{2n} - 2(25 - 8)(25^{n-1} + \dots + 8^{n-1}) =$$

$$= 17[5^{2n} - 2(25^{n-1} + \dots + 8^{n-1})]$$

2. Frația dată se simplifică prin 17 dacă și numai dacă $17 \mid 52a$ și $17 \mid 17b75$, ceea ce conduce la: $52a = 17k$, $17b75 = 17l$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$.

$$520 \leq 52a \leq 529 \Rightarrow 520 \leq 17k \leq 529 \Rightarrow 30,5 \dots \leq k \leq 31,1 \dots \text{ și cum } k \in \mathbb{N}^* \text{ avem } k = 31 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 52a = 17 \cdot 31 = 527 \Rightarrow a = 7.$$

$$1075 \leq 17b75 \leq 1975 \Rightarrow 1075 \leq 17l \leq 1975 \Rightarrow 63,2 \dots \leq l \leq 116,1 \dots \text{ și cum } l \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l \in \{64, \dots, 116\}. \text{ Din faptul că } \left. \begin{matrix} 25 \mid 17b75 \\ 2 \mid 17b75 \end{matrix} \right\} \Rightarrow l = 75. \text{ Deci } 17b75 = 17 \cdot 75 = 1275 \Rightarrow b = 2.$$

$$3. [(-1)^n \cdot (-2)^n - 4^n] : (-4^n) = \{[(-1) \cdot (-4)]^n - 4^n\} : (-4^n) = (4^n - 4^n) : (-4^n) = 0 : (-4^n) = 0.$$

II. 1. $\min(-5; -2) = -5; \quad \frac{1-71}{1-21} = \frac{7}{2}; \quad \sqrt{(-4)^2} = -4 \neq 4.$

$$\text{Deci } \min(-5; -2) + \frac{|-7|}{|-2|} - \sqrt{(-4)^2} = -5 + \frac{7}{2} - 4 = -\frac{11}{2}.$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{3}(\sqrt{2}-x)^2 \geq 0 \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ecuația nu poate avea soluție reală.}$$

$$3. \frac{4+8+12+\dots+400}{3+6+9+\dots+300} = \frac{4(1+2+3+\dots+100)}{3(1+2+3+\dots+100)} = \frac{4}{3}.$$

III. 1. Fie x măsura suplementului unghiului. Deci: $x + \frac{7}{8}x = 180^\circ \Rightarrow x = 96^\circ$.

$$180^\circ - 96^\circ = 84^\circ; \frac{2}{3} \cdot 96^\circ = 64^\circ; \frac{3}{4} \cdot 84^\circ = 63^\circ \Rightarrow 64^\circ - 63^\circ = 1^\circ.$$

2. Se aplică teorema: Două plane paralele sunt intersectate de un al doilea plan după două drepte paralele. Se arată în acest mod că laturile opuse ale patrulaterului EFGH sunt paralele și deci el este paralelogram.

3. Deoarece $AB = AD \Rightarrow ABCD$ – romb și diagonalele sunt perpendiculare între ele $\Rightarrow d(E, BD) = EO = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Fie $AP \perp BC$, $d(E, BC) = AP = d(E, CD) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

TEST NR. 13

I. 1. Stabilind ultima cifră a fiecărui termen se constată că pentru orice număr n impar obținem $A : 5$.

$$2. \text{Deci } 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} = 30^{n+1} \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow 2^n \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 5^n \cdot 5^2 = 30^n \cdot 30 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^n \cdot 75 = 30^n \cdot 75 \Rightarrow \Rightarrow 30^n \cdot 75 = 30^n \cdot 75.$$

$$3. \quad x = \frac{3}{4}y \Rightarrow \frac{5y-7x}{6y-8x} = \frac{y\left(5-7 \cdot \frac{3}{4}\right)}{y\left(6-8 \cdot \frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{0} = \text{imposibil.} \quad \text{Deci dacă } \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \quad \text{raportul}$$

$$\frac{5y-7x}{6y-8x} \text{ nu există.}$$

II. 1. $|2x + 5 - |x - 2|| = 0 \Rightarrow 2x + 5 = |x - 2|$.

$$a) \quad x \geq 2 \Rightarrow 2x + 5 = x - 2 \Leftrightarrow x = -7 \text{ nu convine;}$$

$$b) \quad x < 2 \Rightarrow 2x + 5 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \text{ convine.}$$

$$2. n = 1991 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1990) = 1991 + 2 \cdot \frac{(1+1990) \cdot 1990}{2} = 1991 + 1991 \cdot 1990 = 1991 \cdot 1991 = 1991^2.$$

3. Se știe că $\{x\}$ – partea întreagă a lui x , $|x|$ – modulul lui x , $\{x\}$ – partea zecimală a lui x

$$\text{Sistemul devine: } \begin{cases} \max(-4; -\sqrt{17}; -3) \cdot x - 0,3 \cdot y = \frac{7}{6} - 24 \\ \min\left(\frac{1}{8}; \sqrt{6}; 1\right) \cdot x + \frac{1}{9}y = -\frac{1}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - \frac{3}{10}y = \frac{7}{6} - 24 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{9}y = -\frac{1}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

III. 1. Sunt unghiuri adiacente cu bisectoarele perpendiculare între ele \Rightarrow sunt unghiuri suplementare. Fie măsurile lor x și $5x \Rightarrow x + 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$.

2. Fie trapezul ABCD cu $AB \parallel DC$, $AB > DC$, $AD \perp AB$ și $AC \perp BD$. Din D construim $DD' \parallel AC$, $D' \in AB \Rightarrow D'D \perp BD$ și în $\Delta D'DB$ conform teoremei înălțimii avem: $AD^2 = D'A \cdot AB$. Dar $D'A = DC \Rightarrow AD^2 = DC \cdot AB$ - q.e.d.

3. Planul AEF intersectează dreptele BD respectiv CD în punctele P și Q. În ΔABP , [BE] este bisectoare și înălțime $\Rightarrow \Delta ABP$ este isoscel $\Rightarrow [BE]$ și mediană $\Rightarrow AE = EP$. Analog

$AF = FQ$. În ΔAPQ conform reciprocei teoremei lui Thales, $\left. \begin{array}{l} EF \parallel PQ \\ \text{Dar } PQ \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow EF \parallel (BCD)$ - q.e.d.

TEST NR. 14

I. 1. $ab = cd \Rightarrow 10a + b = cd$ (1)

Dar $a = x - 1$; $b = x$; $c = x + 1$; $d = x + 2$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow 10(x - 1) + x = (x + 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 = 6$ și $x_2 = 2$.

i) Dacă $x = 6 \Rightarrow a = 5$; $b = 6$; $c = 7$; $d = 8$;

ii) Dacă $x = 2 \Rightarrow a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$.

2. Evident trebuie că $\frac{2x+5}{x-1}$ să fie pătrat perfect $\Rightarrow \frac{2x+5}{x-1} = \frac{2x-2+7}{x-1} = 2 + \frac{7}{x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{7}{x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x - 1 \mid 7 \Rightarrow x - 1 \in \{\pm 1, \pm 7\} \Rightarrow x \in \{-6, 0, 2, 8\}$. Dar $\frac{2x+5}{x-1}$ este pătrat

perfect numai pentru $x \in \{-6, 2\}$.

3. Fie $d \mid 10n + 53$ și $d \mid 7n + 37 \Rightarrow d \mid 7(10n + 53) - 10(7n + 37) \Leftrightarrow d \mid 1$.

II. 1. Știm $\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{pentru } a \leq b \\ b & \text{pentru } a > b \end{cases}$. Deci $\min\left(x + 1; 4 - \frac{x}{2}\right) = \begin{cases} x + 1 & \text{pentru } x \leq 2 \\ 4 - \frac{x}{2} & \text{pentru } x > 2 \end{cases}$

Dacă $x \leq 2$ avem $\min\left(x + 1; 4 - \frac{x}{2}\right) = x + 1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$ (1)

Dacă $x > 2$ avem $\min\left(x + 1; 4 - \frac{x}{2}\right) = 4 - \frac{x}{2} \Rightarrow 4 - \frac{x}{2} \geq 1 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow x \in \{3, 4, 5, 6\}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. $f(x) = \sqrt{3^2 + 3^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot x - 2 \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Se dau valori reale lui x și

se obțin cele două puncte necesare reprezentării grafice.

3. Evident $a = 2^{1988}(2^2 - 2 - 1) = 2^{1988} \cdot 1 = 2^{1988}$.

$$\text{Deci } \frac{2^{1988}}{x} = \frac{2^{1996}}{\frac{1}{2^2}} \Rightarrow x = \frac{2^{1998}}{2^2} \Rightarrow x = \frac{2^{1998}}{2^{1998}} \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{III. 1. } \begin{array}{l} \sin B = \frac{AC}{BC} \\ \sin C = \frac{AB}{BC} \end{array} \Rightarrow \sin B \cdot \sin C = \frac{AC \cdot AB}{BC^2} = \frac{AC \cdot AB}{AC^2 + AB^2} \Rightarrow \frac{1}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{AC^2}{AC \cdot AB} + \frac{AB^2}{AC \cdot AB} = \frac{AC}{AB} + \frac{AB}{AC} \quad (1).$$

Observație: $AC > 0$ și $AB > 0 \Rightarrow (AC - AB)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + AB^2 \geq 2AB \cdot AC \mid : (AC \cdot AB) \Rightarrow \frac{AC}{AB} + \frac{AB}{AC} \geq 2 \quad (2).$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{1}{\sin B \cdot \sin C} \geq 2 \Rightarrow \sin B \cdot \sin C \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin B \cdot \sin C \leq \sin 30^\circ \quad \text{q.e.d.}$

Evident dacă $AC = AB \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic și isoscel $\Leftrightarrow \sin B \cdot \sin C = \sin 30^\circ \quad \text{q.e.d.}$

2. Aplicăm teorema medianei în $\triangle ABC$: $CM^2 = \frac{2(BC^2 + AC^2) - AB^2}{4} \quad (1)$

Aplicăm teorema medianei în $\triangle DAB$: $DM^2 = \frac{2(BD^2 + AD^2) - AB^2}{4} \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \triangle CMD$ isoscel, dar $CN = ND \Rightarrow MN \perp CD \quad (I)$

Aplicăm teorema medianei în $\triangle ACD$ și $\triangle BCD$ și obținem $AN = BN \Rightarrow \triangle ABN$ isoscel, dar $BM = MA \Rightarrow MN \perp AB \quad (II)$

Din (I) și (II) $\Rightarrow MN$ este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD q.e.d.

TEST NR. 15

I. 1. Evident că $a + b = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1992}{1993} + \frac{1}{1993}\right)}_{1992 \text{ paranteze}} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1992 \text{ paranteze}} = 1992$

și deci $3 \mid 1992 \Rightarrow 3 \mid (a + b) \quad \text{q.e.d.}$

2. Efectuând calculele pentru $n = 2k$ și $n = 2k + 1$ unde $k \in \mathbb{N}$ obținem că egalitatea are loc pentru $n = 2k$.

3. Evident că $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ și deci $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ cum

(obs.) $\frac{1}{n+1} > 0$ și vom avea: $A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow A < 1 \quad \text{q.e.d.}$

II. 1. Notăm $n^2 + n = t \Rightarrow (t-7)(t-3) + 4 = t^2 - 10t + 25 = (t-5)^2$ deci $a = (n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4 = (n^2 + n - 5)^2$, deci a este pătrat perfect.

2. Dăm lui x valorile 0 și 1 și vom obține sistemul:

$$\begin{cases} f(0) + 2f(1) = 1 \\ f(1) + 2f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) + 2f(1) = 1 \\ -4f(0) - 2f(1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Cum $f(x)$ este liniară $\Rightarrow f(x) = ax + b$

(2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 2$.

$$3. P(X) = (X^{1993} + 1992X^{1992}) + (X^{1992} + 1992X^{1991}) + \dots + X^2 + 1992X + X + 1993 = \\ = (X + 1992)(X^{1992} + X^{1991} + X^{1990} + \dots + X^2 + X) + X + 1993.$$

$$\text{Evident } P(-1992) = 0 \cdot A - 1992 + 1993 = 1 \Rightarrow P(-1992) = 1.$$

- III. 1. Prelungim latura AC cu $[CA'] \equiv [AC]$ (C între A și A'). Se obține $\triangle AA'B$ unde $[AA'] \equiv [AB]$ și $m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow \triangle AA'B$ echilateral. CB mediană în $\triangle AA'B$ echilateral $\Rightarrow BC \perp AA'$ deci $m(\angle C) = 90^\circ$ și $m(\angle B) = 30^\circ$.

$$2. A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_A = \frac{1}{2} a \cdot h_B = \frac{1}{2} a \cdot h_C \Rightarrow a \cdot h_A = a \cdot h_B = a \cdot h_C \Rightarrow \frac{h_A}{a} = \frac{h_B}{b} = \frac{h_C}{c} \text{ q.e.d.}$$

$$3. \text{ Fie piramida VABC, unde } \triangle ABC \text{ echilateral } AB = 6\sqrt{3} \Rightarrow R\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow R = 6\text{m.}$$

$$\text{fie OM apotema bazei} \Rightarrow OM = \frac{1}{2} R = 3\text{m. Din } \triangle VOM (\angle O = 90^\circ) \Rightarrow$$

$$VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\text{m. } A_l = \frac{1}{2} P_b \cdot A_p = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot VM = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 5 = 45\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h_p = \frac{1}{3} \frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3} = 36\sqrt{3} \text{ m}^3.$$

TEST NR. 16

I. 1. $a^2 + ac + 5b = a(a+c) + (a+c)b = (a+b)(a+c) = 15$.

$$2. \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y} = \frac{4-3}{4+3} \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{xy-y^2}{xy+y^2} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{7}.$$

$$3. E(2) = 6 + p, E(3) = 12 + p \Rightarrow 6 \mid p; \text{ cum } E(5) = 30 + p \Rightarrow 6 \mid E(5).$$

II. 1. $|x-1| > 2 \Leftrightarrow 2 < x-1 < -2 \Leftrightarrow 3 < x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

$$2. (x+1) + (x+2) + \dots + (x+100) = 15050 \Leftrightarrow 100x + (1+2+\dots+100) = 15050 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 100x + 50 \cdot 101 = 15050 \Leftrightarrow 100x = 10000 \Leftrightarrow x = 100.$$

$$3. \text{ Trebuie să avem: } \frac{1}{2} = \frac{m}{-n} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}, n = -1.$$

- III. 1. Fie D piciorul înălțimii și $\angle BED$ unghiul cerut.

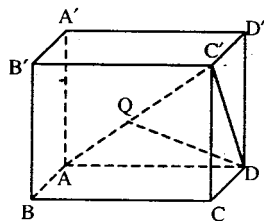
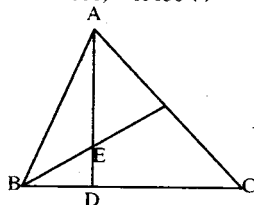
$$\text{Se calculează măsurile unghiurilor ABD și EBD} \Rightarrow \\ \Rightarrow m(\angle BED) = 57^\circ.$$

$$2. C'C \perp (ABCD), CD \perp AD \Rightarrow T.3 \Rightarrow C'D \perp AD.$$

$$\text{Deci } \triangle ADC' \text{ este dreptunghic } (m(\angle ADC') = 90^\circ).$$

$$AC' = a\sqrt{3}, C'D = a\sqrt{2}, AD = a,$$

$$AD^2 = AQ \cdot AC' \Rightarrow AQ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{AQ}{AC'} = \frac{1}{3}.$$



TEST NR. 17

- I. 1. Observăm că $2 \cdot (-1)^k + 2 \cdot (-1)^{k+1} + np = 2 \cdot (-1)^k - 2 \cdot (-1)^k + np = np$.

$$\text{Deci } \frac{np}{(n+p)\sqrt{np}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{n} - \sqrt{p})^2 > 0 \text{ deci adevărat.}$$

$$2. \frac{a}{b} = \frac{13}{12} \Rightarrow b = \frac{12}{13}a. \text{ Deci } \frac{3a-b}{4a+b} = \frac{3a - \frac{12}{13}a}{4a + \frac{12}{13}a} = \frac{a \cdot \frac{27}{13}}{a \cdot \frac{64}{13}} = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

$$3. \text{Făcând calculele se obține: } E = \frac{1}{(3a-2)(3a+1)}. \text{ Folosind aceasta vom obține:}$$

$$S = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right] = \frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Deci $S < 1/3$ q.e.d.

- II. 1. $8x^2 - 6xy + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 4xy - 2xy + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x(2x - y) - y(2x - y) = 5 \Rightarrow (2x - y)(4x - y) = 5 \Rightarrow (x, y) \in \{(2, 3); (-2, -9); (-2, -3); (2, 9)\}.$

$$2. \text{Evident } f(x) = \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \Rightarrow f(x) = |x+3| + |3+\sqrt{5}| \Rightarrow f(x) = x+3 + (3+\sqrt{5}).$$

Imediat avem: $f(-3) = 3 - \sqrt{5}$; $f(1) = 7 - \sqrt{5}$; $f(-\sqrt{5}) = 2(3 - \sqrt{5})$; $f(1 + \sqrt{5}) = 7$ și de aici ordonarea imediată.

$$3. \text{Evident } P(1) = 0 \Rightarrow a(1-b)(-1)^{2k+1} - b(-1)^{k+2} - a(-1)^{k+2} + 1 = 0.$$

$$\text{Pentru } k \text{ par} \Rightarrow (b-2)(a-1) = 1 \Rightarrow a = 2 \text{ și } b = 3.$$

$$\text{Pentru } k \text{ impar} \Rightarrow b(a+1) = -1 \Rightarrow a = -2 \text{ și } b = 1.$$

- III. 1. Fie (BF bisectoarea $\angle B$, $F \in (AC)$. F se află pe mediatoarea lui [BC], deci [FC] = [FB] $\Leftrightarrow \angle FCB = \angle FBC \Leftrightarrow m(\angle B) = 2m(\angle C)$. q.e.d.

2. În $\triangle ABC$ construim înălțimea CD, deci $CD \perp AB$. Folosindu-ne de cele două triunghiuri dreptunghice formate BCD și ACD vom afla lungimile segmentelor AD și BD și deci $AB = (5 + \sqrt{6})$ cm când $\angle A$ este ascuțit și $AB = (5 - \sqrt{6})$ cm când $\angle A$ este obtuz.

3. Notăm cu R - raza sferei, r - raza cilindrului și a - muchia cubului.

$$\text{Avem: } 4\pi R^2 = 6\pi r^2 = 6a^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}a; r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}.$$

$$V_{sf} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \cdot a^3, V_{cil} = \frac{2a^3}{\sqrt{\pi}}, V_{cub} = a^3. \text{ Deci } V_{cub} < V_{cil} < V_{sf}.$$

TEST NR. 18

$$1. |a\sqrt{3} - 1| \geq 0 \text{ și } \sqrt{3} - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow a \in \Phi$$

$$2. \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2. \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2.$$

3. Notăm $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$: sistemul devine: $\begin{cases} a+b=0,7 \\ 3a-5b=0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=2,1 \\ 3a-5b=0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0,7 \\ 8b=1,6 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,5 \\ b=0,2 \end{cases}$.

II. 1. $4 \mid 32a \Rightarrow a \in \{0, 4, 8\}$. Pentru $a=0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{320}{5} \Rightarrow x=192$.

Pentru $a=4 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{324}{5} \Rightarrow x=194,4$.

Pentru $a=8 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{328}{5} \Rightarrow x=196,8$.

2. a) $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

b) Din $x+y+z=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=1$ și cum:

$xy+xz+yz \leq x^2+y^2+z^2 \Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 1/3$.

III. 1. Se observă că $AB^2 + AC^2 = 3a^2 = BC^2$.

Deci triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Se deduce imediat că ANPM este dreptunghi și

deci $MN = AP = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

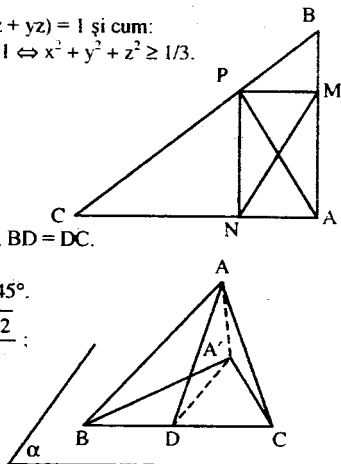
2. Fie D piciorul perpendicularei dusă din A pe BC; $BD = DC$.

$\triangle ABA' \cong \triangle ACA'$ (ic) deci $A'D \perp BC$; unghiul plan corespunzător diedrului este $\angle ADA'$; $m(\angle ADA') = 45^\circ$.

Fie $AB = a \Rightarrow AC = a, BC = a\sqrt{2}, AD = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$AA' = AD \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{2} ; \sin \angle ACA' = \frac{AA'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle ACA') = 30^\circ$; la fel $m(\angle ABA') = 30^\circ$.



TEST NR. 19

I. 1. Pentru toți exponenții impari $\Rightarrow S = \underbrace{-1-1-1-\dots-1}_{101 \text{ termeni}} = -101 = S_{\min}$.

Pentru toți exponenții pari $\Rightarrow S = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{101 \text{ termeni}} = 101 = S_{\max}$.

Deci $S_{\min} + S_{\max} = -101 + 101 = 0$. În general $-101 \leq S \leq 101$. Cum sunt un număr impar de termeni $\Rightarrow S \neq 0$.

2. Din media geometrică $\Rightarrow \sqrt[4]{4^x \cdot 8^y} = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{3y} = (2^6)^2 \Leftrightarrow 2^{2x+3y} = 2^{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+3y=12 \Leftrightarrow 2x=12-3y$ și $2x \in \mathbb{N} \Rightarrow 12-3y \in \mathbb{N}$.

Deci: $12-3y \geq 0 \Rightarrow 12 \geq 3y \Leftrightarrow y \leq 4$.

Fie $y=4 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,4)$ o soluție ș.a.m.d. ... $y=3 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x \in \mathbb{N} \dots$

$$3. \overline{a^4} \cdot \overline{a^6} + 1 = \overline{a^4} \cdot (\overline{a^4} + 2) + 1 = (\overline{a^4})^2 + 2\overline{a^4} + 1 = (\overline{a^4} + 1)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

$$\text{II. 1. } |3x - 2| \leq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \leq 7 \\ 3x - 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}, 3 \right] \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$x - 5 \in [-1, 2] \Leftrightarrow -1 \leq x - 5 \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in [4, 7] \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix} \Rightarrow B = \{4, 5, 6, 7\}. \text{ Deci } A \cap B = \emptyset.$$

$$2. \begin{cases} x + 2^n y = 4^n \\ 2x - y = 2^{2n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2^n y = 4^n \\ 2^{n+1} x - 2^n y = 2^{3n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + 2^{n+1}) = 2^{2n} + 2^{3n+1} \\ x + 2^n y = 4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{2n} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \text{Din } P(X): (X-1) \\ \text{Din } P(X): (X+1), \text{ rest } 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + n = -2 \\ m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

III. 1. Din V construim $OL \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC \Rightarrow OL = OM = ON$

$$m(\angle OEN) = m(\angle C) + m(\angle OBC) = 60^\circ + m(\angle OBC) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m(\angle OKM) &= 180^\circ - m(\angle AKB) = 180^\circ - [180^\circ - (m(\angle OAB) + m(\angle B))] = \\ &= m(\angle OAB) + m(\angle B) = m(\angle A/2) + m(\angle B) = 180^\circ - m(\angle OAC + 60^\circ) = \\ &= 120^\circ - m(\angle A/2) = 60^\circ + m(\angle ABO) = 60^\circ + m(\angle OBC) \quad (2) \end{aligned}$$

$$m(\angle OEN) = m(\angle OKM)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow ON = OM \quad \Rightarrow \triangle ONE = \triangle OMK \Rightarrow OE = OK \quad \text{q.e.d.}$$

$$m(\hat{N}) = m(\hat{M}) = 90^\circ$$

2. Construiesc $AM \Rightarrow \triangle MAB$ și $\triangle MAD$. În $\triangle MAD$ avem: $m(\angle MAD) > m(\angle DAC) \Rightarrow m(\angle MAD) > 45^\circ$. Analog în $\triangle BAM$ avem: $m(\angle MAB) > 45^\circ$.

$$AB = AD$$

$$\text{Compar: } \triangle MAB \text{ și } \triangle MAD \text{ unde: } AM = AM \quad \Rightarrow \triangle MAB \neq \triangle MAD \Rightarrow MD > MB$$

$$m(\angle MAD) > m(\angle MAB)$$

3. Din calcule vom găsi apotema piramidei egală cu 10 cm și deci

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot P_b \cdot A_p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10 = 320 \text{ cm}^2, \text{ iar muchia laterală egală cu } 2\sqrt{41} \text{ cm.}$$

TEST NR. 20

I. 1. $n = 4$; 2. $\frac{2}{9}$.

II. 1. $\frac{1}{2}$; 2. $BC = 16 \text{ cm}$, $h_a = 3\sqrt{3} \text{ cm}$, $h_b = \frac{24\sqrt{3}}{7} \text{ cm}$, $h_c = 8\sqrt{3} \text{ cm}$.

III. 1. a) $S = \{(1, 0); (1, 1)\}$; b) $x = \frac{4}{5}$.

2. a) 45° ; b) $AM \perp MN$ și $BM \perp MN$, deci $[\angle(NBC), (AMN)] = \angle AMB$; $\cos \angle AMB = \frac{7}{25}$

c) Ne folosim de egalitatea produselor dintre baze și înălțimi în triunghiul ABN sau folosind teorema celor trei perpendiculare construind $AD \perp (NBC)$ ($D \in BC$); $DE \perp NB$

$$(E \in NB) \Rightarrow AE \perp NB, AE = \frac{48\sqrt{82}}{41} \text{ cm.}$$

$$d) A = 16(16 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}^2; V = 256 \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 22

- I. 1. Fie a și $a + 100$ cele două numere; evident $a + 100 = 3a + 20$. Deci $a = 40$ numărul mic și 140 numărul cel mare.

$$2. \text{ Din } \frac{a-13}{b} = \frac{a}{b+7} \Leftrightarrow (a-13)(b+7) = ab \Leftrightarrow 7a = 13b + 91. \text{ Notez } \frac{a}{b} = k \Rightarrow a = bk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{91}{7k-13}. \text{ Dar } b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{91}{7k-13} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 7k-13 \in D_{91} \Leftrightarrow 7k-13 \in \{1, 7, 13, 91\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{a}{b} \in \left\{ 2, \frac{20}{7}, \frac{26}{7}, \frac{104}{7} \right\}.$$

$$3. \text{ Pentru } n - \text{număr par} \Rightarrow E = 0.$$

$$\text{Pentru } n - \text{număr impar} \Rightarrow E = \frac{1}{n}.$$

- II. 1. $mx + 1 = x + m \Leftrightarrow m - 1 = x(m - 1)$

$$a) \text{ dacă } m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \Rightarrow S = \{1\}$$

$$b) \text{ dacă } m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow S = \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ Efectuând calculele avem: } \left. \begin{array}{l} E(x) = \frac{x+1}{4} \\ E(x) \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{x+1}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 = 4k \Leftrightarrow x+1 = 4k, \text{ unde}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. x = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} \Leftrightarrow x = |3 - \sqrt{2}| \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Deci } a = (-1)^n \cdot (x + y) = (-1)^n (3 - \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}) = (-1)^n (6 - 2\sqrt{2}).$$

Studiem cele două cazuri n - par și n - impar și obținem două valori ale expresiei repetitive:

$$n - \text{par} \Rightarrow a = 6 - 2\sqrt{2}$$

$$n - \text{impar} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} - 6$$

- III. 1. Din datele problemei avem: $\frac{m(\hat{A})}{5} = \frac{m(\hat{B})}{6} = \frac{m(\hat{C})}{7} = \frac{180^\circ}{18^\circ} = 10^\circ \Rightarrow m(\angle A) = 50^\circ;$

$$m(\angle B) = 60^\circ, m(\angle C) = 70^\circ. \text{ Fie } AA' \perp BC \text{ și } CC' \text{ bisectoarea } \angle C. \text{ Dacă } CC' \cap AA' = \{P\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle C'PA) = 55^\circ.$$

$$2. \text{ Fie } ABCD \text{ un patrulater ortodiagonal înscris în cercul de centru } O. \text{ Dacă } S \text{ este proiecția}$$

$$\text{lui } O \text{ pe } CD \text{ atunci } OS = AB/2. \text{ Fie } E \text{ punctul diametral opus lui } D. [SO] \text{ este linie mijlocie}$$

$$\text{în } \triangle DCE \text{ și deci } SO = CE/2 \text{ (1); } m(\angle CDE) = 90^\circ - m(\angle DEC) = 90^\circ - m(\angle DAC) =$$

$$= m(\angle ADB) \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{CE} \Rightarrow AB = CE \text{ (2). Din (1) și (2) } \Rightarrow SO = AB/2 \text{ q.e.d.}$$

3. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiuri dreptunghice formate obținem: $D'M = \frac{3}{2}a$:

$$MO = \frac{\sqrt{3}}{2}a : D'O = \frac{\sqrt{6}}{2}a. \text{ Cum } OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ și } D'C = a\sqrt{2} \text{ conform reciprocei teoremei lui}$$

Pitagora $\Rightarrow \triangle OMD' \text{ și } \triangle OCD' \text{ sunt dreptunghice în } O \Rightarrow D'O \perp OM, D'O \perp OC \text{ și } OM \not\perp OC \Rightarrow D'O \perp (COM) \text{ q.e.d.}$

TEST NR. 23

I. 1. Pentru $n = 0 \Rightarrow a = 12^0 - 3! - 15 - 2^0 = 1 - 2! - 14! = 2 - 4 = -2 \Rightarrow a = -2$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow a = 12^1 - 3! - 15 - 2^1 = 1 - 1! - 13! \Rightarrow a = -2$.

Pentru $n = 2 \Rightarrow a = 12^2 - 3! - 15 - 2^2 = 11! - 11! = 0 \Rightarrow a = 0$.

Pentru $n \geq 3 \Rightarrow a = 2^n - 3 + 5 - 2^n = 2$. Deci $1a! \in \{0, 2\}$ q.e.d.

2. Evident $\overline{ab} = 10a + b \Rightarrow \sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} = \sqrt{11(a+b)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b = 11$ și a, b cifre \Rightarrow
 \Rightarrow numerele 29; 92; 38; 83; 47; 74; 56 și 65.

3. Observăm că: $\sqrt{x^2 + 6x + 34} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + 25} = \sqrt{(x+3)^2 + 25} \geq \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{y^2 - 2y + 10} = \sqrt{y^2 - 2y + 1 + 9} = \sqrt{(y-1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{z^2 - 6z + 25} = \sqrt{z^2 - 6z + 9 + 16} = \sqrt{(z-3)^2 + 16} \geq \sqrt{16} = 4$$

Deci avem o sumă de numere pozitive ≥ 12 , valoarea minimă 12 va fi luată când fiecare pătrat va lua valoarea minimă adică zero.

Deci $(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$; $(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$; $(z-3)^2 = 0 \Rightarrow z = 3$.

II. 1. $P(X) = X(X^{1991} - X) - 1991(X-1) \Rightarrow P(X) = (X-1)[X^{1991} + X^{1990} + \dots + X - (1+1+\dots+1)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(X) = (X-1)^2(X^{1990} + 2X^{1989} + 3X^{1988} + \dots + 1991X + 1991) \Rightarrow P(X) : (X-1)^2$.

$$2. \text{ Sistemul dat se scrie: } \begin{cases} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y\right) \cdot 6 = 3 \\ -12x + 10 \cdot 0.6y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -12x + 6y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 6y = 18 \\ -12x + 6y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{3+y}{2} \end{cases}$$

$$3. E = \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} = |\sqrt{6}+1| - |\sqrt{6}-1| =$$

$$= \sqrt{6}+1 - (\sqrt{6}-1) = \sqrt{6}+1 - \sqrt{6}+1 = 2 \text{ sau folosim formula radicalilor dubli.}$$

III. 1. Evident: $\sphericalangle AFC \equiv \sphericalangle BAD$ (\sphericalangle corespondente) și $\sphericalangle ACF \equiv \sphericalangle CAD$ (\sphericalangle alternate interne) \Rightarrow
 $\Rightarrow \triangle AFC$ isoscel. Analog se arată că și $\triangle ABF$ este isoscel. $\triangle EAF \equiv \triangle CAB$ (L.U.L.) \Rightarrow
 $[EF] \equiv [BC]$ q.e.d.

$$2. \text{ Din } BM = MC \Rightarrow A_{\triangle ABM} = A_{\triangle AMC} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot QM \Rightarrow AB \cdot PM = AC \cdot QM \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{PM}{QM} = \frac{AC}{AB} \text{ q.e.d.}$$

3. Deoarece $DE \perp CE$ folosind teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow CE \perp (ABD)$. Cum $EF \perp BD \Rightarrow CF \perp BD$. Cum EF și CF nu sunt paralele $\Rightarrow BD \perp (ECF)$, dar $BD \subset (BCD) \Rightarrow (BCD) \perp (CEF)$.

TEST NR. 24

I. 1. $3 < 2x - 3 < 10 \Leftrightarrow 3 < x < \frac{13}{2}$; dar $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{4, 5, 6\}$.

$$5 < 3x - 2 < 11 \Leftrightarrow \frac{7}{3} < x < \frac{13}{3}; \text{ dar } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{3, 4\}.$$

Deci $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4\} \Rightarrow A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A \setminus B = \{5, 6\}$, $B \setminus A = \{3\}$.

2. $\frac{15}{2n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n+1 \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 7\}$

3. $x^3 + y^3 = (s^2 - 3p)s$; $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$.

II. 1. $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$; $x^2 - (a+c)x + ac = (x-a)(x-c)$.
c.m.m.m.c. = $(x-a)(x-b)(x-c)$.

2. $\frac{3a-2b}{5a-3b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3\frac{a}{b}-2}{5\frac{a}{b}-3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 15\frac{a}{b}-10 = 5\frac{a}{b}-3 \Leftrightarrow 10\frac{a}{b} = 7 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{10}$.

3. $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 2ab+2ac+2bc \leq 2a^2+2b^2+2c^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$; egalitate pentru $a=b=c$.

III. 1. $m(\angle ABC) = 120^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ echilateral \Rightarrow

$\Rightarrow AB = BD = AD = 7 \Rightarrow P(ABCD) = 28 \text{ cm}$.

2. a) fie $D' = \text{pr}_{BC} D$, $A' = \text{pr}_{BC} A$, $A'D' = AD = a$

$BA' = D'C = \frac{a}{2}$; în $\triangle AA'B$: $\cos \angle ABA' = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle ABA') = 60^\circ$ la fel $m(\angle DCD') = 60^\circ$.

$\triangle ABD$ isoscel $AB = AD = a \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle DBC) = m(\angle ADB) = m(\angle ABD)$,

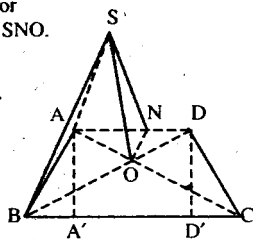
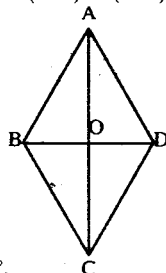
deci $m(\angle DBC) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle BDC) = 90^\circ$ la fel $m(\angle BAC) = 90^\circ$.

b) $SO \perp (ABCD)$, $OA \perp AB \Rightarrow SA \perp AB$.

c) Fie $ON \perp AD \Rightarrow SN \perp AD$: unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de planele (SAD) și $(ABCD)$ este $\angle SNO$.

$\text{tg } \angle SNO = \frac{SO}{ON}$; $ON = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } \angle SNO = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle SNO) = 60^\circ$.



TEST NR. 25

I. 1. $S = -2 + 4 - 6 + 8 - \dots - 1994 + 998 = \frac{2+2+2+\dots+2}{498 \text{ termeni}} - 1994 + 998 = 0.$

2. Deci: $n = 1994(1994 - 1) - 1993 = 1994 \cdot 1993 - 1993 = 1993^2.$

Din $\frac{\frac{x}{1993}}{2} = \frac{1993}{2} \Rightarrow \frac{\frac{x}{1993}}{2} = \frac{1993}{2} \Rightarrow \frac{x}{2 \cdot 1993} = \frac{1993 \cdot 2}{1993^2} \Leftrightarrow x = 4.$

3. Avem: $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0 \Leftrightarrow (a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$a - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ deoarece $(a - \sqrt{2})^2 \geq 0$

$b - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ $(b - \sqrt{3})^2 \geq 0$

Deci: $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(a - b) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$
 $= \frac{2\sqrt{6} - 6 + 6 - 3\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = -1.$

II. 1. Deci $P(X) : (2X - 1) \Leftrightarrow P(1/2) = 0 \Leftrightarrow 2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + 2^2 \cdot \frac{1}{2} - n^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{2+2+2+\dots+2}_{n \text{ termeni}} - n^2 = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2n - n^2 = 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{matrix} \right| \Rightarrow n = 2.$

2. $\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(3-x)^2} = 1 \Leftrightarrow |x-4| + |3-x| = 1$

x	-\infty	3	4	+\infty
x-4	-	-	0	+
3-x	+	+	+	0

Pentru: a) $x \in (-\infty, 3) \Leftrightarrow -x + 4 + 3 - x = 1 \rightarrow S_1$ (1)

b) $x \in [3, 4) \Leftrightarrow -x + 4 - 3 + x = 1 \rightarrow S_2$ (2)

c) $x \in [4, +\infty) \Leftrightarrow x - 4 - 3 + x = 1 \rightarrow S_3$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [3, 4]$. Deci $x \in [3, 4]$.

3. Soluție imediată prin calcul $\Rightarrow x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$

III. 1. Fie $D \in [AB]$ unde $[BD] \equiv [BM]$, $B \in [MD] \Rightarrow \triangle ADC$ echilateral
 $\triangle MAC \equiv \triangle BDC$ (LUL) $\Rightarrow [MC] \equiv [BC].$

2. Fie $MN \parallel BC \Rightarrow MN + 2BM = 12$ (1)

$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{8} = \frac{12 - BM}{12} \Leftrightarrow 12MN + 13MB = 96$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow MB = 3$ cm și $MN = 6$ cm. Fie $ED = x$. Deci $\frac{AE}{AD} = \frac{MN}{BC} ;$

$$\frac{8\sqrt{2}-x}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}. \text{ Deci } ED = 2\sqrt{2}, \text{ unde } AD \perp BC \text{ și } AD \cap MN = \{E\}.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Din } DA \perp (ABC) \text{ și } EC \subset (ABC) &\Rightarrow DA \perp EC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} EC \perp AD \\ EC \perp AB \\ AD \not\perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} EC \perp (ABD) \\ \text{Dar } BD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} EC \perp BD \Rightarrow BD \perp EC \\ \text{Dar } EF \perp BD \Rightarrow BD \perp FE \\ EC \not\perp FE \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (EFC) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

TEST NR. 26

I. 1. $27^{n+1} \cdot 5^{4n+1} - 3^{3n+2} \cdot 5^{4n+2} = 27 \cdot 27^n \cdot 5^{4n+1} - 9 \cdot 27^n \cdot 5 \cdot 5^{4n+1} =$
 $= 9 \cdot 27^n \cdot 5^{4n+1} (3 - 5) = -18 \cdot 27^n \cdot 5^{4n+1} : 18.$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{3 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{830 \cdot 837} &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{830} - \frac{1}{837} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{837} \right) = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{834}{3 \cdot 837} = \frac{276}{7 \cdot 837} = \frac{276}{5859} \end{aligned}$$

$$3. ac = bd \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{d}{a} = \frac{c+d}{a+b} = k \Rightarrow \frac{cd}{ab} = k^2 = \left(\frac{c+d}{a+b} \right)^2$$

II. 1. 4 și -3 fiind soluții ale ecuației $x^2 + mx + n = 0$ avem:

$$\begin{cases} 16 + 4m + n = 0 \\ 9 - 3m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7m + 7 = 0 \\ 9 - 3m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -12 \end{cases}$$

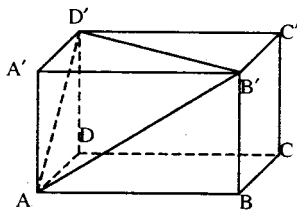
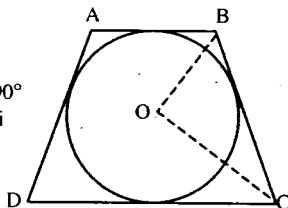
$$2. \frac{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}{y^2 - x^2 - 2xz - z^2} = \frac{x^2 - (y+z)^2}{y^2 - (x+z)^2} = \frac{(x+y+z)(x-y-z)}{(x+y+z)(y-x-z)} = \frac{x-y-z}{y-x-z}.$$

3. Da.

II. 1. OB și OC sunt bisectoarele unghiurilor suplementare $\angle ABC$ și $\angle BCD$, rezultă: $m(\angle OBC) + m(\angle OCB) = 90^\circ$
 analog: $m(\angle OAD) + m(\angle ODA) = 90^\circ$ deci $CO \perp OB$ și $AO \perp DO$.

$$2. d(B', AD') = \frac{2A(AB'D')}{AD'}. \text{ Se calculează } AB', B'D'$$

și AD' din triunghiurile dreptunghice $\triangle ABB'$, $\triangle A'B'D'$ și $\triangle ADD'$ cu teorema lui Pitagora și apoi $A(AB'D')$ cu formula lui Heron.



$$\text{I. } 1. \quad \left. \begin{array}{l} x = 8k \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{10}{z} = k \Rightarrow y = 6k \in \mathbb{N} \\ z = \frac{10}{k} \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow k \in \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 5, 10 \right\}. \text{ Se obțin tripletele: } (4, 3, 20);$$

(8, 6, 10); (16, 12, 5); (20, 15, 4); (40, 30, 2); (80, 60, 1).

$$2. \text{ Fie } a \text{ și } b \text{ cele două numere: avem: } \left. \begin{array}{l} a+b=30 \\ ab=200 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Media armonică} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot 200}{30} = \frac{40}{3}.$$

3. Pătratele perfecte au una din formele: a) $4k$ sau b) $8k+1$

Din teorema împărțirii cu rest avem:

$$a) \quad 4k = 16p + r \Rightarrow r = 4k - 16p \Leftrightarrow r = 4(k - 4p) \Rightarrow r = 4s \Rightarrow r \text{ este pătrat perfect}$$

$$b) \quad 8k + 1 = 16p + 3 \Rightarrow r = 8(k - 2p) + 1 \Rightarrow r = 8s + 1 \Rightarrow r \text{ este pătrat perfect}$$

$$\text{II. } 1. \text{ Din rezolvarea sistemului obținem: } \begin{cases} x = \frac{m+4}{m^2-4} \\ y = \frac{m}{4-m^2} \end{cases} \quad (1)$$

Discuție: 1) dacă $m \neq \pm 2$ – sistem compatibil determinat cu soluția (1)

2) dacă $m = \pm 2$ – sistem incompatibil

$$2. \text{ Relația dată } \Leftrightarrow x\sqrt{2} + 3x + 3y - \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow (x-y)\sqrt{2} + 3(x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$3. \quad a) \quad \frac{x^4+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \frac{x^4+2x^2+1-2x^2}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \frac{(x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2}{x^2+x\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)}{x^2+x\sqrt{2}+1} = x^2 - x\sqrt{2} + 1.$$

$$b) \quad \frac{x^8-9}{(x^2-\sqrt{3})(x^4+3)} = \frac{(x^4)^2-3^2}{(x^2-\sqrt{3})(x^4+3)} = \frac{(x^4-3)(x^4+3)}{(x^2-\sqrt{3})(x^4+3)} = \frac{(x^2)^2-(\sqrt{3})^2}{x^2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(x^2+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3})}{x^2-\sqrt{3}} = x^2 + \sqrt{3}.$$

III. 1. Fie $m[\angle(xOy)] = 13^\circ$. Construim $[\angle(zOy)] = 7 \cdot m[\angle(xOy)] = 7 \cdot 13^\circ = 91^\circ$, iar în punctul O ridicăm $OA \perp Oy \Rightarrow m[\angle(AOy)] = 90^\circ \Rightarrow m[\angle(Aoz)] = 1^\circ$.

$$2. \text{ Se folosește formula } m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \text{ unde } m_a \text{ este lungimea medianei}$$

corespunzătoare laturii BC, iar a, b, c sunt lungimile laturilor $\triangle ABC$.

(vezi manualul de geometrie clasa a VII-a, ediția 1993, pagina 37)

3. Deoarece $MA = MB = MC \Rightarrow M$ se află pe perpendiculara din centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ pe planul său, deci $M \in (DO)$ unde $DO \perp (ABC)$; DO – înălțimea tetraedrului ABCD.

Exprimând pe AO și OM în funcție de AB folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OAM vom obține $AB = 3\sqrt{2} \cdot a$.

TEST NR. 28

- I. 1. Fie $N = xyz$, $x \neq 0$; avem: $x + y + z = 7$ și $7 \mid N = 100x + 10y + z$.

$$\text{Deducem: } \left. \begin{array}{l} y + z = 7 - x \\ x \geq 1 \Rightarrow 7 - x \leq 6 \end{array} \right\} \Rightarrow y + z \leq 6$$

$$\begin{aligned} 7 \mid (14 \cdot 7x + 7y) + (2x + 3y + z) &\Rightarrow 7 \mid 2x + 3y + z = (x + y + z) + x + 2y \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7 \mid 7 + (x + 2y) \Rightarrow 7 \mid x + 2y; \text{ dar } x = 7 - y - z \Rightarrow 7 \mid 7 + y - z \Rightarrow 7 \mid y - z; \\ \text{dar } -9 \leq y - z \leq 9 \text{ și } |y - z| \leq y + z \leq 6 &\Rightarrow y = z. \end{aligned}$$

$$2. \text{ Adevăr, deoarece } |x - 1| = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 5 \text{ sau } x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = 6 \text{ sau } x = -4.$$

$$3. (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 > 0 \text{ deoarece egalitatea are loc numai pentru } x = a = b = c, \text{ ecuația nu are soluții reale.}$$

- II. 1. Fie $x^2 - 1 = a$; expresia devine:

$$\frac{a(a-2)+1}{a(a-3)+2} = \frac{a^2-2a+1}{a^2-3a+2} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1}{a-2} = \frac{x^2-2}{x^2-3}$$

2. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ c^2 + d^2 \geq 2cd \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd) \geq 4\sqrt{abcd} = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$$

$$ab + cd \geq 2\sqrt{abcd} = 2; bc + da \geq 2\sqrt{abcd} = 2; ac + bd \geq 2\sqrt{abcd} = 2$$

Adunând membru cu membru aceste patru inegalități obținem:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd + bc + da + ac + bd \geq 4 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$3. \sqrt{8} \cdot |-2| \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} = 4.$$

- III. 1. Cu teorema medianei avem:

$$m_c < m_b \Leftrightarrow m_c^2 < m_b^2 \Leftrightarrow \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} < \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \Leftrightarrow$$

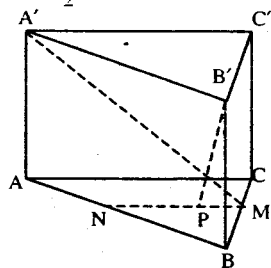
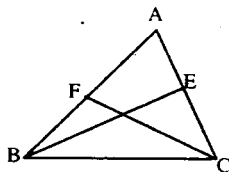
$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - c^2 < 2a^2 + 2c^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 < c^2 \Leftrightarrow b < c.$$

$$2. a) \text{ În planul } A'BC \text{ fie } A'M \perp BC, A'A \perp (ABC),$$

$$A'M \perp BC \Rightarrow T3 \perp \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

b) Fie MN linie mijlocie și P piciorul perpendiculei coborâte din B' pe MN. Deci $B'B \perp (NBM)$,

$$B'P \perp MN \Rightarrow T3 \perp \Rightarrow BP \perp MN \Rightarrow B'P = \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$



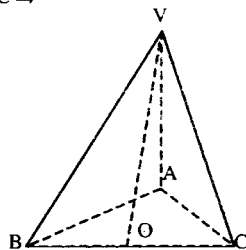
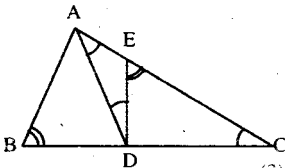
TEST NR. 29

- I. 1. $xy - x + y = 18 \Leftrightarrow xy - x + y - 1 + 1 = 18 \Leftrightarrow x(y-1) + y - 1 = 17 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)(y-1) = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=17 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x+1=17 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=16 \\ y=2 \end{cases}$
2. $ab = 2^7(1+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-7}) = 1+2+\dots+2^7$.
 Fie $S = 1+2+\dots+2^7 \Rightarrow (2-1)S = (2-1)(1+2+\dots+2^7) = 2-1+2^2-2+\dots+2^8-2^7 = 2^8-1$.
 Deci $ab = 2^8-1$.
3. Deoarece $|x| \geq 0 \Rightarrow$ valoarea de adevăr este fals.
- II. 1. $N = 10^{3k} + 2^{3k} = 1000^k + 8^k = 1000^k + 1^k + 8^k - 1^k = (1000+1)(1000^{k-1} - 1000^{k-2} + \dots - 1000 + 1) + (8-1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 8 + 1) = M_7 + M_7 = M_7$ deoarece $1001 = M_7$.
 S-au folosit formulele:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), (\forall)n \in \mathbb{N}, \text{ impar}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

2. $2a^2 + 4ac + 2c^2 - b(a+c) - b^2 = 2(a+c)^2 - b(a+c) - b^2 = (a+c)^2 - b(a+c) + (a+c)^2 - b^2 = (a+c)(a+c-b) + (a+c-b)(a+c+b) = (a+c-b)(2a+b+2c)$.
- III. 1. a) Deoarece AM este mediană relativă la ipotenuză în triunghiul ABC, triunghiurile ADC și ADB sunt isoscele. Deci $\angle DAC \equiv \angle ACD$ (1)
 Unghiul $\angle DEC$ fiind exterior triunghiului ADE, avem $\angle DEC = \angle DAC + \angle ADE$. (2)
 În $\triangle ABC$ și $\triangle DEC$, unghiurile $\angle ABC$ și $\angle DEC$ au același complement ($\angle ACB$), deci $\angle ABC \equiv \angle DEC$ (3)
 Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \angle ABC = \angle DEC = \angle DAC + \angle ADE = \angle ACD + \angle ADE \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC - \angle ACD = \angle B - \angle C$.
 b) $AE = ED \Rightarrow \triangle ADE$ isoscel, deci $\angle EAD \equiv \angle ADE$.
 Folosind (1) $\Rightarrow \angle C \equiv \angle ADE$ și din $\angle ADE = \angle B - \angle C \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle B = 2\angle C$. Cum $\angle B$ și $\angle C$ sunt complementare \Rightarrow
 $\Rightarrow m(\angle B) = 60^\circ$ și $m(\angle C) = 30^\circ$.
2. Fie ABC ($\angle A = 90^\circ$) baza piramidei VABC și cum $(VA) \equiv (VB) \equiv (VC)$, rezultă că piciorul O al înălțimii piramidei este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.
 Deci O este mijlocul ipotenuzei BC și $VO \perp (ABC)$,
 $VO \subset (VBC) \Rightarrow (VBC) \perp (ABC)$.



TEST NR. 30

- I. 1. $1998 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{101}{100} - \frac{1}{100} = 1998 + (1+1+\dots+1)$
 Numărul termenilor din paranteză este egal cu numărul termenilor sumei $3+5+\dots+101$ care este 50. Deci suma este $1998 + 50 = 2048$.
2. $\frac{3}{7} < \frac{n+1}{42} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 18 < n+1 \leq 21 \Leftrightarrow 17 < n \leq 20 \Rightarrow S = \{18, 19, 20\}$
3. $P(1+x) = P(1-x) \Leftrightarrow (1+x)^2 + a(1+x) + 1 = (1-x)^2 + a(1-x) + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2ax = 4x (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

- II. 1. Presupunem că $(\exists)x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$, care verifică relația

$ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c impare. Înlocuind obținem: $am^2 + bmn + cn^2 = 0$, care este imposibilă deoarece membrul stâng este un număr impar. În concluzie nu există $x \in \mathbb{Q}$ care verifică relația din enunț.

2. Numerele naturale a și b fiind nenule $\Rightarrow a \geq 1$ și $b \geq 1 \Leftrightarrow a - 1 \geq 0$ și $b - 1 \geq 0 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow ab + 1 \geq a + b$. Conform ipotezei $ab < c$ și deci: $a + b < c + 1$. Cum a, b, c sunt naturale $\Rightarrow a + b \leq c$.

- III. 1. $(AB) \equiv (AC)$, $(BN) \equiv (NC) \Rightarrow AN \perp BC$.

În $\triangle ANB$ ($\angle ANB = 90^\circ$), $(BM) \equiv (MA) \Rightarrow NM = \frac{1}{2} AB = AM = 4$ cm.

La fel $NP = AP = \frac{1}{2} AC = AM = 4$ cm.

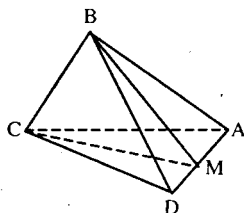
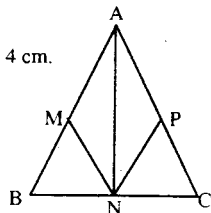
2. Scriind în două moduri volumul tetraedrului $MABC$ și $MBCD$ avem:

$$\frac{V[MABC]}{V[MBCD]} = \frac{S[ABC] \cdot d(M, (ABC))}{S[BCD] \cdot d(M, (BCD))} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{V[MABC]}{V[MBCD]} &= \frac{V[BCAM]}{V[BCDM]} = \frac{S[CAM] \cdot d(B, (CAM))}{S[CDM] \cdot d(B, (CDM))} = \\ &= \frac{S[CAM]}{S[CDM]} = \frac{AM \cdot d(C, AM)}{DM \cdot d(C, DM)} = \frac{AM}{DM} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \frac{AM}{DM} = \frac{S[ABC] \cdot d(M, (ABC))}{S[BCD] \cdot d(M, (BCD))} \quad (3)$$

$$\text{Rezultă din (3): } d(M, (BCD)) = d(M, (ABC)) \Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{S[ABC]}{S[BCD]}$$



TEST NR. 31

- I. 1. 1; 2. 5; 7; 5 și 10; 3. Se analizează cazurile: $x < 1$ și $x > 1$. Dacă $x < 1$ ecuația nu are soluții reale. Dacă $x > 1$, atunci orice număr din intervalul $(1; \infty)$ este soluție a ecuației.
- II. 1. Fie E punctul diametral opus lui A . $\angle EAC = 90^\circ - \angle AEC$. Dar $\angle AEC \equiv \angle ABC \Rightarrow \angle EAC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD$. Deci $\angle EAC \equiv \angle BAD = 90^\circ - \angle ABC$. $\angle DAO = \angle BAC - (\angle BAD + \angle CAE) = \angle BAC - 2 \cdot \angle BAD = \angle BAC - 2 \cdot (90^\circ - \angle ABC) \Rightarrow \angle DAO = \angle BAC + 2 \cdot \angle ABC - 180^\circ$.
2. Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și M mijlocul lui AB , N mijlocul lui DC iar $\{P\} = AD \cap BC$. Presupunem că $PM \cap DC = \{N'\}$ și vom arăta că $N' = N$. $DN' \parallel AM \Rightarrow \triangle PDN' \sim \triangle PAM \Rightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{DN'}{AM}$ (1). Analog $\frac{PN}{PM} = \frac{CN'}{BM}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{DN'}{AM} = \frac{CN'}{BM}$. Dar $AM \equiv BM \Rightarrow DN' \equiv CN' \Rightarrow N' = N$ (mijlocul lui DC).
- III. 1. $AB \perp a$.
2. 45° pentru că triunghiul AQP este dreptunghic isoscel (Am notat cu Q mijlocul lui MN , și cu P mijlocul lui BC).

TEST NR. 32

- I. 1. $\frac{3+6+9+\dots+1995+1998}{2+4+6+\dots+1330+1332} = \frac{3(1+2+3+\dots+665+666)}{2(1+2+3+\dots+665+666)} = \frac{3}{2}$
2. $\frac{2n-5}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 2n-5 < n+1 \Leftrightarrow n < 6, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. Fie x capacitatea rezervorului iar t timpul în care cele 4 robinete umplu rezervorul (t măsurat în minute). Într-un minut primul robinet umple a 60-a parte din rezervor, al doilea a 120-a parte, al treilea a 180-a parte, iar al patrulea a 240-a parte.
- $$t \cdot \frac{x}{60} + t \cdot \frac{x}{120} + t \cdot \frac{x}{180} + t \cdot \frac{x}{240} = x \Rightarrow t \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1}{180} + \frac{1}{240} \right) = 1 \Rightarrow t = \frac{25}{720} = 1 \Rightarrow t = \frac{720}{25} \Rightarrow t = \frac{144}{5} \Rightarrow t = 28\frac{4}{5} \text{ min.}$$
- II. 1. $2(a-b)(a+c) = (a-b+c)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ac - 2ab - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.
2. $AC' = p - a$, $BA' = p - b$, $CB' = p - c$, unde a, b, c sunt laturile triunghiului iar $p = \frac{a+b+c}{2}$.
- III. 1. Din congruența triunghiurilor $B'MB$ și $DAM \Rightarrow B'M \equiv DM \Rightarrow \Delta B'MD$ este isoscel $\Rightarrow MN \perp B'D$. Analog $NP \perp B'D$. Deci $B'D \perp MNP$. Din calcule $\Rightarrow MN \equiv NP \equiv PM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta MNP$ este echilateral $\Rightarrow A_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.
2. $h = 15$; $G+R = 25 \Rightarrow h^2 = G^2 - R^2 = 225 \Rightarrow (G-R)(G+R) = 225 \Rightarrow (G-R) \cdot 25 = 225 \Rightarrow G-R = 9$. Cum $G+R = 25 \Rightarrow G = 17$ și $R = 8$.
3. $A = \pi R G = \pi \cdot 17 \cdot 8 = 136\pi$. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 15 = 320\pi$.

TEST NR. 33

- I. 1. 3; 2. Dacă $m \neq 3$ ecuația are soluție unică $x = \frac{5m+1}{m-3}$. Dacă $m = 3$, ecuația nu are soluții.
- $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-3 \mid 5m+1$. Dar $m-3 \mid 5m-15 \Rightarrow m-3 \mid (5m+1) - (5m-15) \Rightarrow m-3 \mid 16 \Rightarrow m-3 \in \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\} \Rightarrow m \in \{-13, -5, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 11, 17\}$. 3. 402, 403 și 404.
- II. 1. Se demonstrează că cele două unghiuri sunt suplementare. Se găsesc măsurile 30° și 150° .
2. Folosind faptul că un punct situat pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului $\Rightarrow EM \equiv EQ$ și $EP \equiv PN$. $\angle PEQ = \angle MEN$ (opuse la vârf) $\Leftrightarrow \Delta MEN \equiv \Delta QEP \Rightarrow MN \equiv PQ$. ΔAQM și ΔCPN sunt isoscele $\Rightarrow AC \perp PN$ și $AC \perp MQ \Rightarrow PN \parallel MQ$. Deci $MNPQ$ este trapez isoscel $\Rightarrow MNPQ$ - patrulater inscriptibil.
- III. 1. Propoziția este falsă.
2. Se folosește faptul că intersecția dintre un plan paralel cu o dreaptă și alt plan ce conține acea dreaptă este o dreaptă paralelă cu dreapta dată.

TEST NR. 34

- I. 1. $x = 6630$; 2. 32 000 lei; 3. $E(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b + 1 = x^3 + ax^2 + x^2 + ax + bx + b + 1 = x^3 + x^2 + ax + b + ax^2 + bx + 1 = x^3 + 0 + ax^2 + bx + 1 = x(x^2 + ax + b) + 1 = x \cdot 0 + 1 = 1$.
- II. 1. Formând cu cele două egalități un sistem cu necunoscutele $f(x+1)$ și $g(x-1)$, obținem: $f(x+1) = 2x+6$ și $g(x-1) = -2x+2$. Fie $f(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x+1) = ax+a+b$. Deci $ax+a+b = 2x+6$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow a=2$ și $a+b=6 \Rightarrow a=2, b=4$. Analog se determină $g(x) = -2x$; 2. $90^\circ, 60^\circ$ și 30° .

- III. I. $\left. \begin{array}{l} \text{DALAB} \\ \text{DM} \perp (\text{ABCD}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{MA} \perp \text{AB}$ aplicând teorema catetei în triunghiul $\text{MAB} \Rightarrow \text{AB} \subset (\text{ABCD})$

$$\Rightarrow \text{AB}^2 = \text{PB} \cdot \text{MB}. \text{ Analog } \text{BC}^2 = \text{QB} \cdot \text{MB}. \text{ Deci } \frac{\text{AB}^2}{\text{BC}^2} = \frac{\text{PB} \cdot \text{MB}}{\text{QB} \cdot \text{MB}} \Rightarrow \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{\text{PB}}{\text{QB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\text{PB}}{\text{QB}} \Rightarrow \frac{9-4}{4} = \frac{\text{PB}-\text{QB}}{\text{QB}} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{3}{\text{QB}} \Rightarrow \text{QB} = \frac{12}{5} \text{ cm}.$$

$$\text{BC}^2 = \text{QB} \cdot \text{MB} \Rightarrow 16 = \frac{12}{5} \cdot \text{MB} \Rightarrow \text{MB} = \frac{5 \cdot 16}{12} = \frac{20}{3} \text{ cm}.$$

2.a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; b) $\text{BA} \equiv \text{BB}' \equiv \text{BC} = a \Rightarrow \text{B}$ se află pe perpendiculara ridicată în centrul cercului

circumscriș $\triangle \text{AB}'\text{C}$ pe planul acestui triunghi $\text{DA} \equiv \text{DB}' \equiv \text{DC} = a\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \text{D}'$ se află tot pe perpendiculara ridicată în centrul cercului circumscriș triunghiului $\text{AB}'\text{C}$ pe planul acestui triunghi. Deci $\text{BD}' \perp (\text{AB}'\text{C})$.

TEST NR. 35

- I. 1. 26; 2. 45 creioane și 75 creioane; 3. $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(z-3)^2} = 0 \Leftrightarrow |x-1| + |y-2| + |z-3| = 0 \Leftrightarrow x=1, y=2, z=3$.

- II. 1. Ducem $\text{DD}' \perp \text{AB}$ și $\text{CC}' \perp \text{AB}$, $\text{D}' \in \text{AB}$, $\text{C}' \in \text{AB}$. $\text{AD}' \equiv \text{C}'\text{B} = 5 \text{ cm} \Rightarrow \text{C}'\text{A} = 21 \text{ cm}$. Aplicând teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic ACB ($\angle \text{C} = 90^\circ$) obținem:

$$\text{CC}'^2 = \text{AC}' \cdot \text{C}'\text{B} \Rightarrow \text{CC}'^2 = 21 \cdot 5 \text{ cm} \Rightarrow \text{CC}'^2 = 105 \text{ cm} \Rightarrow \text{CC}' = \sqrt{105} \text{ cm}.$$

$$\text{A}_{\text{ABCD}} = \frac{\text{CC}'(\text{AB} + \text{CD})}{2} \Rightarrow \text{A}_{\text{ABCD}} = \sqrt{105} \cdot 21 \text{ cm}.$$

2. Se folosește faptul că într-un trapez linia mijlocie are lungimea egală cu semisuma bazelor.

- III. 1.a) Din triunghiul dreptunghic ACB ($\text{AB} \equiv \text{BC} = 2 \text{ cm}$) se calculează $\text{AC} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. Din triunghiul dreptunghic ACC' se calculează $\text{CC}' = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. Deci $\triangle \text{ACC}'$ este isoscel ($\text{AC} \equiv \text{CC}'$); b) $8 + 16\sqrt{2} \text{ cm}$.

2. Diagonala cubului este diametrul sferei. Notând cu x latura cubului se obține:

$$x^2 + 2x^2 = 4a^2 \Rightarrow 3x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}.$$

TEST NR. 36

- I. 1. 10%; 2. $S = 1000 \cdot 2000 = 2\,000\,000$; 3. $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = x^6 - 2x^3 + 1 + x^4 - 2x^2 + 1 = (x^3 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 \geq 0$.
- II. 1. $E(a, b) = \frac{2a}{b}$. 2. Fie AB și CD bazele trapezului. $E \in AD$, $F \in BC$. Din asemănarea triunghiurilor DEM și DAB rezultă că $\frac{EM}{AB} = \frac{DM}{DB}$. Analog $\frac{MF}{AB} = \frac{CM}{AC}$. Dar $\frac{DM}{DB} = \frac{CM}{AC}$ (se obține din asemănarea triunghiurilor DMC și BMA folosind apoi proporții derivate).
Deci $\frac{EM}{AB} = \frac{FM}{AB} \Rightarrow EM \equiv FM$.
- III. 1. $A_1 = 144\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$; $A_1 = (194 + 144\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$; $V = \frac{2072}{3}\pi \text{ cm}^3$. 2. $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$.

TEST NR. 37

- I. 1. $\frac{1}{5}$. 2. $x = 3$. 3. Fie a, b, c cele trei numere $a = \frac{b+c}{2}$; $b = \frac{a+c}{2}$; $c = \frac{a+b}{2}$. Înlocuind pe $a = \frac{b+c}{2}$ în ultimele două egalități și efectuând calculele obținem $b=c \Rightarrow a=b$. Deci $a=b=c$.
- II. 1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Din ipoteză obținem relațiile: $3a + b = 1$, $a + b = 3 \Rightarrow a = -1$, $b = 4$.
2. Presupunem că: $\sqrt{7} - 3 < \sqrt{11} - 4 \Leftrightarrow 4 - 3 < \sqrt{11} - \sqrt{7} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{11} - \sqrt{7} \Leftrightarrow 1^2 < (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2 \Leftrightarrow 1 < 11 - 2\sqrt{77} + 7 \Leftrightarrow 2\sqrt{77} < 17 \Leftrightarrow 4 \cdot 77 < 289 \Leftrightarrow 308 < 289$ - fals.
Deci $\sqrt{7} - 3 > \sqrt{11} - 4$.
- III. 1. Se poate aplica teorema lui Menelaus în triunghiul AMN tăiat de secanta BC.
2. Fie α unghiul format de diagonala AC' cu fața $ABB'A'$, β unghiul format cu fața $ABCD$, iar γ unghiul format cu fața $ADD'A'$. $\sin \alpha = \frac{B'C'}{AC'}$; $\sin \beta = \frac{CC'}{AC'}$; $\sin \gamma = \frac{D'C'}{AC'}$.
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{B'C'^2}{AC'^2} + \frac{CC'^2}{AC'^2} + \frac{D'C'^2}{AC'^2} = \frac{B'C'^2 + CC'^2 + D'C'^2}{AC'^2} = \frac{AC'^2}{AC'^2} = 1$$

TEST NR. 38

- I. 1.a) $A = (-4, 8)$; $B = (-5, 3)$. b) $A \cup B = (-5, 8)$; $A \cap B = (-4, 3]$; $A \setminus B = (3, 8)$; $B \setminus A = (-5, -4]$; $(B \setminus A) \cap Z = \{-4\}$.
2. Rezolvând sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 1 = y \\ x + 3 = y \end{cases}$ obținem $P(2, 5)$.
3. Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow x = 3$ este soluție unică a ecuației. Dacă $m = -1 \Rightarrow$ orice număr real este soluție a ecuației.
- II. 1. $E(x) = 2x^2 - 4$.

2. Fie triunghiul ABC, A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB și AD ⊥ BC, D ∈ BC. B'C' ∥ A'D pentru că B'C' este linie mijlocie DC' = $\frac{AB}{2}$ pentru că DC' este

mediana corespunzătoare unghiului drept în ΔADB (demonstrați!). A'B' = $\frac{AB}{2}$ deoarece

A'B' este linie mijlocie. Deci A'B' ≡ DC' ⇒ A'B'C'D este trapez isoscel.

$$\text{III. 1. } \frac{a^3}{4} \quad 2. A_{VBC} = \frac{VB \cdot VC \cdot \sin \hat{BVC}}{2} = \frac{VB^2 \cdot \sin \hat{BVC}}{2}$$

$$A_{MNP} = \frac{MN \cdot MP \cdot \sin \hat{NMP}}{2} = \frac{MN^2 \cdot \sin \hat{NMP}}{2}$$

Dar MN = $\frac{1}{3}$ VB iar $\angle NMP \equiv \angle BVC$ (ca unghiuri cu laturile paralele) ⇒ $A_{MNP} = \frac{1}{9} A_{VBC}$.

TEST NR. 39

$$\text{I. 1. } 5 - 2\sqrt{8}; 2. x = 6, y = 4, z = 4; 3. x^2 < 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 < (2 - \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (-2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}). \text{ Dar } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0\}.$$

$$\text{II. 1. } E(x) = 1 - 4x^2. 2. \angle DEF \equiv \angle BEC = 180^\circ - (\angle BCD + \frac{1}{2} \angle ABC); \angle DFE = 180^\circ - \\ - (\angle BAD + \frac{1}{2} \angle ABC). \text{ Dar } \angle BAD \equiv \angle BCD. \text{ Deci } \angle DEF \equiv \angle DFE \Rightarrow \Delta DEF \text{ este isoscel.}$$

III. 1. Fie O mijlocul lui BD. Triunghiurile MBD și PBD fiind isoscele ⇒ MO ⊥ BD și PO ⊥ BD. Deci unghiul diedru al planelor (MBD) și (PBD) este MOP. Din triunghiurile dreptunghice MAO și PAO se calculează MO și PO. Apoi se calculează MP din trapezul ACPM. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora ⇒ $\angle MOP = 90^\circ$.

$$2. A_1 = 60\pi \text{ cm}^2; A_1 = 96\pi \text{ cm}^2; V = 96\pi \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 40

- I. 1. a) -1 dacă n este par și 1 dacă n este impar.
b) 0 dacă n este impar și $2 \cdot 3^n$ dacă n este par.
2. 280 bilete cu 300 lei și 40 bilete cu 400 lei biletul.
3. Dacă m ≥ 0, soluția este x ∈ [0, ∞). Dacă m < 0, soluția este x ∈ (-2, 0].

$$\text{II. 1. Se obține } x = 2. 2. \text{ Ducem } DE \perp BC, E \in BC. \Delta ABD \equiv \Delta BDE \Rightarrow BE = AB = a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{c} = \frac{a-c}{b} \Rightarrow DE = \frac{c(a-c)}{b}$$

$$A_{BDC} = \frac{BC \cdot DE}{2} = \frac{ac(a-c)}{2b}. A_{ABD} = A_{ABC} - A_{BDC} = \frac{bc}{2} - \frac{ac(a-c)}{2b} = \frac{c(b^2 - a^2 + ac)}{2b}$$

$$\text{III. 1. } 5 \text{ cm. } 2. \frac{a\sqrt{6}}{3}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{3}.$$

TEST NR. 41

- I. 1. $\frac{a}{b} = \frac{62}{85}$. 2. $n = 0$. 3. $y \in \left(-4, \frac{17}{4}\right]$.
- II. 1. $\left. \begin{array}{l} P(2) = 5 \Rightarrow 4a + b = -5 \\ P(-3) = 1 \Rightarrow 27a + 3b = -74 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{59}{15}, b = \frac{161}{15}$. 2. $x = c \cdot \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = c \cdot \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$.
- III. 1. a) $\triangle BCM$ este un triunghi isoscel cu un unghi de 60° , deci este triunghi echilateral.
b) E clar că $ABMD$ este trapez isoscel. Fie N mijlocul lui AB . $MNBC$ este paralelogram. Deci $MN \equiv BC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow MN \equiv AN \equiv NB \Rightarrow \angle MAN \equiv \angle AMN = u$,
 $\angle MBN \equiv \angle BMN = v$. Scriind faptul că suma măsurilor unghiurilor triunghiului AMB este de $180^\circ \Rightarrow 2(u + v) = 180^\circ \Rightarrow u + v = 90^\circ$, adică $\angle AMB = 90^\circ$.
2. a) Aria sectorului este egală cu a treia parte din aria cercului din care provine. Deci aria cercului este $36\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow$ raza cercului din care provine sectorul este de 6 cm. Această rază va fi generatoarea conului. Lungimea părții de cerc aflată în sector este a treia parte din lungimea arcului din care provine sectorul, deci este egală cu 4π cm. Dar această lungime este chiar lungimea arcului de bază al conului \Rightarrow raza cercului de bază al conului este de 2 cm. Deci $R=2$ cm și $G=6$ cm \Rightarrow înălțimea conului $h = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm.
- Având aceste elemente se calculează $A_l = 16\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{16\sqrt{2}}{3} \pi \text{ cm}^3$.
- b) Se obține raza sferei înscrise de lungime $\sqrt{2}$ cm, $A = 8\pi \text{ cm}^2$.

TEST NR. 42

- I. 1. $x = 2$; 2. 8,36; 3. 70,(1)%. II. 1. Câtul este $4x^2 - 3x - 2$, iar restul $2x + 3$. 2. 106.
- III. 1. $\frac{a\sqrt{3a}}{9}$. 2. $\frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{DC}{36} \Rightarrow DC = \frac{108}{10} = \frac{54}{5}$. $DB^2 = DA^2 + AB^2 \Rightarrow DB^2 = 225 + 1296 = 1521 \Rightarrow DB = 39$.
- $\frac{DO}{OB} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{DO}{DO + OB} = \frac{3}{3 + 10} \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{3}{13} \Rightarrow \frac{DO}{39} = \frac{3}{13} \Rightarrow DO = 9$.
- $VD^2 = VO^2 + DO^2 \Rightarrow VD^2 = 1600 + 81 = 1681 \Rightarrow VD = 41$. $P_{VOD} = VO + OD + VD = 90$ cm.
- $A_{ABCD} = \frac{DA(AB + DC)}{2} = 351 \text{ cm}^2$. $V_{ABCD} = \frac{1}{3} VO \cdot A_{ABCD} = 468 \text{ cm}^3$.

TEST NR. 43

- I. 1. $3(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}$. 2. Să presupunem că este ora x . Au trecut deci x ore. Au rămas $(24 - x)$ ore. Deci $24 - x = \frac{1}{7}x \Rightarrow x = 21$. Deci este ora 21. 3. Trebuie să demonstrăm că:
- $$a < t_1a + t_2b < b, t_1a + t_2b > a \Leftrightarrow t_1a + (1 - t_1)b > a \Leftrightarrow (t_1 - 1)a + (1 - t_1)b > 0 \Leftrightarrow$$

- $\Leftrightarrow (1-t_1)b - (1-t_1)a > 0 \Leftrightarrow (1-t_1)(b-a) > 0$ - adevărat deoarece $1-t_1 > 0$ și $b-a > 0$.
- II. 1. Egalitatea din enunț este echivalentă cu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c \Rightarrow$ triunghiul este echilateral. 2. $P(1) = 0 \Rightarrow X - 1 \mid P(X)$.
- III. Considerăm o secțiune axială VAB în conul din care provine trunchiul de con $ABB'A'$ este secțiunea axială a trunchiului de con. $A' \in (VA)$, $VO \perp AB$, $O \in (AB)$, $VO \cap A'B' = \{O'\}$, $O' \in A'B'$. $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB$; $\frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} \Leftrightarrow \frac{9}{15} = \frac{VB'}{VB'+10} \Rightarrow VB' = 15$; $VB = 25$.
- $VO^2 = VB^2 - OB^2 = 625 - 225 = 400 \Rightarrow VO = 20$. $V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1500\pi$.
- $A_{\text{lat}} = \pi \cdot 25 \cdot 15 = 375\pi$.

TEST NR. 44

- I. 1.a) 72; b) -104. 2. 37 și 2. 3. $\frac{X-2}{2X^2+5X+7}$.
- II. 1. $P(1) = 0 \Rightarrow m+n=0$. $P(-1) = 0 \Rightarrow -m-n+m+n=0 \Rightarrow 0=0$. Deci $m=-n$.
2. $x(2m-1) = 2(2m-1)$. Dacă $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x=2$ soluția unică. Dacă $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ orice număr natural este soluție a ecuației.
- III. 1. $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$. $\angle BAD = 30^\circ \Rightarrow \angle BAM = 60^\circ$.
 $\angle ABN = \frac{1}{2} \cdot \angle ABC \Rightarrow \angle ABN = 30^\circ$. $\angle APB = 180^\circ - \angle BAP - \angle ABP \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle APB = 90^\circ \Rightarrow \angle NPM = 90^\circ$. $\angle PNC = \angle BAN + \angle ABN = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$.
 $\angle PMC = \angle BAM + \angle ABM = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.
2. Diagonala cubului este chiar diametrul sferei. Fie x lungimea muchiei cubului: $3x^2 = 4r^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. $V = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8r^3\sqrt{3}}{9}$.

TEST NR. 45

- I. 1. a) $-\frac{431}{2}$; b) 0. 2. $P(X) = X^4 + 64 = (X^2)^2 + 8^2 = (X^2)^2 + 2 \cdot 8 \cdot X^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot X^2 =$
 $= (X^2 + 8)^2 - 16X^2 = (X^2 + 8)^2 - (4X)^2 = (X^2 - 4X + 8) \cdot (X^2 + 4X + 8)$. 3. Fie x numărul de ani peste care vârsta tatălui va fi de 3 ori mai mare decât vârsta fiului. $3(8+x) = 28+x \Rightarrow x=2$.
- II. 1. $x = -\sqrt{2}$, $y = 1$.
2. $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab} \Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq (1 + \sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow 1+a+b+ab \geq 1+2\sqrt{ab}+ab \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ - adevărat.
- III. 1. Triunghiul AEC este isoscel $\Rightarrow \angle AEC \equiv \angle ACE$. $\angle BAC = \angle AEC + \angle ACE = 2 \cdot \angle ACE$.
Dar $\angle BAC = 2 \cdot \angle DAC \Rightarrow 2 \cdot \angle ACE = 2 \cdot \angle DAC \Rightarrow \angle ACE \equiv \angle DAC \Rightarrow AD \parallel CE$.
2.a) Notăm cu a lungimea laturii pătratelor. Fie Q mijlocul lui DC . Triunghiul MQP este dreptunghic isoscel $\Rightarrow MP = a\sqrt{2}$, $MQ \perp (ABC) \Rightarrow MQ \perp NQ$. $MN^2 = MQ^2 + NQ^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow MN^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$, $NP^2 = \frac{a^2}{2}$. Se observă că $NP^2 + NM^2 = MP^2 \Rightarrow$ triunghiul PNM

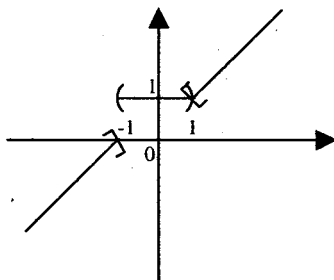
este dreptunghic în N. b) $NQ \parallel AC$, $NP \parallel BD$, dar $BD \perp AC \Rightarrow NQ \perp NP$ și cum $NM \perp NP \Rightarrow$
 \Rightarrow unghiul cerut este $\angle MNQ$. Deci: $\tan \angle MNQ = \frac{MQ}{NQ} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

TEST NR. 46

- I. 1. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{576} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{576}}{2} = \frac{289}{1152}$. 2. 13, 17, 19. 3. $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right)$.
- II. 1. 12, 5. 2. $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \mid \cdot x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0$ - adevărat.
3. $X^4 + X^2 + 4 = X^4 + 2X^2 + 4 - 2X^2 = (X^2 + 2)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 2)(X^2 + \sqrt{2}X + 2)$
- III. 1. $\triangle BDC \sim \triangle ADB$ (deoarece au două unghiuri congruente) $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD^2 = AD \cdot CD$
 $\Rightarrow BD = \sqrt{AD \cdot CD}$. 2. a) 5; b) $A_1 = 12\pi$, $A_2 = 16,50\pi$, $V = 13,50\pi$; c) $\sqrt{9\pi^2 + 16}$.

TEST NR. 47

- I. 1. $x = 3\frac{1}{5}$. 2. Fie $n-1$, n și $n+1$ cele trei numere. $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 1 +$
 $+ n^2 + 2n + 1 + n^2 + 1 = 3n^2 + 3 = 3(n^2 + 1) : 3$. 3. Fie $m, n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{mn} = 11 \Rightarrow$
 $\Rightarrow mn = 121 \Rightarrow m = 1$ și $n = 121$ sau $m = 11$ și $n = 11$ sau $m = 121$ și $n = 1$.
- II. 1.



2. $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0 \Rightarrow a=b=c$.
- III. a) AO este mediatoarea lui [BC]. Dar ABC este triunghi isoscel \Rightarrow AO este bisectoarea unghiului $\angle BAC \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle CAD = 60^\circ$. Dar $\angle DBC \equiv \angle CAD$ și $\angle DCB \equiv \angle BAD$ deoarece patrulaterul ABCD este inscriptibil. Deci $\angle DBC \equiv \angle DCB = 60^\circ \Rightarrow \angle BDC = 60^\circ$. Deci triunghiul BDC este echilateral.
- b) $\triangle MOB \equiv \triangle MOC \equiv \triangle MOD \Rightarrow MB \equiv MC \equiv MD$.

c) $CD \perp OM$ dar $CO \perp OB$ (OB este mediatoarea segmentului CD pentru că O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD). Deci $CD \perp (BOM) \Rightarrow CD \perp BM$. d) $\frac{81\sqrt{13}}{2} \text{ cm}^3$.

TEST NR. 48

I. 1. $(0,1)^{10} > (0,1)^{11}$; $(0,1)^5 > (0,01)^5$. 2. 22 și 68. 3. $x \in (5, 6)$.

II. 1. 30, 60, 120, 150. 2. $\left. \begin{array}{l} P(1) = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0 \\ P(-1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = -1$

$$P(X) = X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$$

III. 1. $\triangle CAD \sim \triangle CMB \Rightarrow \frac{AD}{MB} = \frac{DC}{BC}$; $\triangle BAD \sim \triangle BNC \Rightarrow \frac{AD}{NC} = \frac{BD}{DC}$.

Împărțind cele două egalități membru cu membru obținem concluzia problemei.

2. Fie O mijlocul segmentului MC. Arătăm că $OA \equiv OB \equiv OD \equiv OM$.

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AD \perp DC \\ DC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MD \perp DC. \text{ Analog } MB \perp BC.$$

Deoarece triunghiul MDC este dreptunghic ($\angle MDC = 90^\circ$) și DO este mediana corespunzătoare ipotenuzei rezultă că $DO = \frac{MC}{2}$. Analog $OB = \frac{MC}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp AC. \text{ Cum } AO \text{ este mediana corespunzătoare ipotenuzei } \Rightarrow \\ \Rightarrow AO = \frac{MC}{2}. \text{ Deci } OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD \equiv OM = \frac{MC}{2}.$$

TEST NR. 49

I. 1. $a - \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 25 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$

$$a - \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = 125 \Rightarrow a^3 - 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} = 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a + 3 \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = 125 \Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 125 \Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} - 15 = 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} = 140. \quad 2. 56\,000 \text{ lei}. \quad 3. \overline{5a5}:9 \Rightarrow 10 + a:9 \Rightarrow a = 8; \quad \frac{x}{2} = \frac{585}{3} \Rightarrow x = 390.$$

II. 1. $\frac{a+b+c}{2} < a \mid \cdot 2 \Leftrightarrow a+b+c < 2a \Leftrightarrow b+c < a$ - adevărat.

Analog $\frac{a+b+c}{2} < b$ și $\frac{a+b+c}{2} < c$. 2. $x \in (1, 4)$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2, 3\}$.

III. 1. Fie $\{G\} = EF \cap BC$, $AD \parallel FG \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{CD}{DG}$ și $\frac{AE}{BE} = \frac{GD}{BG}$. Înmulțind membru cu membru

cele două egalități obținem: $\frac{AC}{AF} \cdot \frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BG}$ Dar $\frac{BE}{AB} = \frac{BG}{BD}$. Înmulțind și aceste ultime

egalități obținem: $\frac{AC}{AF} \cdot \frac{AE}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.

2.a. În $\triangle ACO$, $\angle ACO = 90^\circ$, $AC = \sqrt{AO^2 - OC^2} = \sqrt{145}$

În $\triangle ABO$, $\angle ABO = 90^\circ$, $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 15$

În $\triangle CC'O$, $\angle CC'O = 90^\circ$, și $\angle COC' = 30^\circ \Rightarrow CC' = \frac{OC}{2} = 6$

În trapezul dreptunghic $ABC'C$, $\angle ABC' = \angle CC'B = 90^\circ \Rightarrow C'B = 9$, unde C' este proiecția lui C pe α . $BC = 10$.

b. $\triangle OBC'$ este isoscel deoarece $OB = BC' = 8$ și cum BM este mediană $\Rightarrow BM \perp OC'$.

$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ BM \perp OC' \\ OC' \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp OC'$.

TEST NR. 50

I. 1. $S = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots - 1996 + 1998 = 2(1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 998 + 999) =$

$$= 2 \left(\underbrace{-1 - 1 - 1 - \dots - 1}_{\text{de 499 ori}} + 999 \right) = 2(-499 + 999) = 2 \cdot 500 = 1000. \quad 2. 40 \text{ zile. } 3. x = 1, y = 1.$$

II. 1. $m = 3$. 2. $P(X) = (X - a)(X^2 - 4X + 5) + R_1$; $P(X) = (X - b)(X^2 - 6X + 3) + R_2$.

$$P(X) = X^3 - (4 + a)X^2 + (5 + 4a)X - 5a + R_1$$

$$P(X) = X^3 - (6 + b)X^2 + (3 + 6b)X - 3b + R_2. \quad R_1, R_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Rezultă că } 4 + a = 6 + b, 5 + 4a = 3 + 6b, -5a + R_1 = -3b + R_2 = 1.$$

$$\text{Deci } a = 7, b = 5, R_1 = 36 \Rightarrow P(X) = X^3 - 11X^2 + 33X + 1.$$

III. 1. $\triangle CPM \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{CM}{AC}$. $\triangle AQM \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}$.

Adunând membru cu membru cele două egalități se obține concluzia problemei.

2. Fie AA' și BB' perpendicularele pe intersecția planelor. În triunghiul dreptunghic $BB'A$ avem: $AB^2 = BB'^2 + AB'^2$. $AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2$.

Fie u și v măsurile unghiurilor formate de AB cu planele α și β . $u = m(\angle BAB')$.

Din triunghiul dreptunghic $BB'A$ obținem $\text{tg } u = \frac{b}{a^2 + c^2}$. $v = m(\angle ABB')$. $\text{tg } v = \frac{a}{b^2 + c^2}$.

TEST NR. 51

I. 1. $\frac{1}{2}$. 2. $a = \frac{3}{13}$; $b = \frac{4}{13}$; $c = \frac{12}{13}$ și se înlocuiesc în relația $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

3. $\sqrt{1000 - 25\sqrt{n}} = \sqrt{25(40 - \sqrt{n})} = 5\sqrt{40 - \sqrt{n}} \in \mathbb{N} \Rightarrow 40 - \sqrt{n}$ este pătrat perfect și n este tot pătrat perfect $n \in \{16, 225, 576, 961, 1296, 1521, 1600\}$.
- II. 1. $x \in \emptyset$. (Sistemul nu are soluție). 2. $P(-3, -3)$.
- III. 1. $r = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \text{ cm}$. 2. Fie v volumul conului mic, iar V volumul conului mare. $\frac{v}{V} = \frac{1}{27}$;
 $\frac{v}{v+52} = \frac{1}{27} \Rightarrow v = 2 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 54 \text{ cm}^3$.

TEST NR. 52

- I. 1. a) 40; b) 400 g. 2. 10, 30 și 20. 3. 525, 945, 1260, 1470.
- II. 1. $x^6 - 2x^3 = x^6 - 2x^3 + 1 - 1 = (x^3 - 1)^2 - 1^2$.
 2. Se observă că triunghiul este dreptunghic $A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.
- III. 1. Fie O mijlocul lui PQ . $MP \equiv QN = \frac{1}{2} DC$ (DC fiind una din bazele trapezului). Se demonstrează că punctele M, P, Q și N sunt coliniare (exercițiu!).
 $OM = OP + PM$ și $ON = OQ + QN$. Cum $OP \equiv OQ$ și $PM \equiv QN \Rightarrow OM \equiv ON \Rightarrow O$ este și mijlocul lui MN .
 2. Din $BD \perp (ABC)$ și $AB \perp AC \Rightarrow AD \perp AC$.
 $\left. \begin{array}{l} AC \perp AD \\ AC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (ABD) \text{ (} \overline{ABD} \text{)} \perp (ABC)$, deoarece $AD \subset (ABD)$ și $AD \perp (ABC)$.
 $AM \perp BC \Rightarrow AM \perp (BCD)$. Analog $BP \perp (ACD)$. $CD \perp AM$ și $CD \perp AN \Rightarrow CD \perp (AMN)$.
 Analog se arată că $CD \perp (BQP)$. $\triangle AMN$ și $\triangle BQP$ sunt dreptunghice cu vârfurile în M și P .
 Din paralelismul planelor rezultă $AN \parallel PQ$ și $MN \parallel QB$, deci $\angle ANM \equiv \angle BQP$. Deci triunghiurile dreptunghice sunt asemenea.

TEST NR. 53

- I. 1. $3n + 1 \mid 2n + 4 \Rightarrow 3n + 1 \mid 3(2n + 4) \Rightarrow 3n + 1 \mid 6n + 12$ (1)
 $3n + 1 \mid 3n + 1 \Rightarrow 3n + 1 \mid 2(3n + 1) \Rightarrow 3n + 1 \mid 6n + 2$ (2)
 Din (1) și (2) $\Rightarrow 3n + 1 \mid 6n + 12 - (6n + 2) \Rightarrow 3n + 1 \mid 10 \Rightarrow 3n + 1 \in \{1, 2, 5, 10\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3n \in \{0, 1, 4, 9\}$. Cum $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{0, 3\}$. 2. 5. 3. 33, (3) %.
- II. 1. Se verifică prin calcul direct. 2. $\frac{4x+3}{x+1}$.
- III. 1. Fie ABC triunghiul echilateral, M un punct în interiorul său, A', B', C' proiecțiile lui M pe BC, AC respectiv AB , iar D piciorul înălțimii din A . $A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$.
 $A_{ABC} = A_{MAB} + A_{MBC} + A_{MAC} = \frac{MC' \cdot AB}{2} + \frac{MB' \cdot AB}{2} + \frac{MA' \cdot AB}{2}$.

$$\text{Deci } \frac{AD \cdot AB}{2} = \frac{(MC' + MA' + MB') \cdot AB}{2} \Rightarrow AD = MA' + MB' + MC'.$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (MACN) \Rightarrow BD \perp MN. \text{ Deci } \left. \begin{array}{l} MN \perp BD \\ MN \perp OM \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp (BMD).$$

TEST NR. 54

- I. 1. $a > b$. 2. $x \in (-\infty, 0]$. 3. $x = 1$ este soluție comună.
- II. 1. Se verifică prin calcul direct. 2. Se efectuează împărțirea și se obține restul 0.
- III. 1. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$), $AD \perp BC$, $D \in BC$ și E mijlocul lui [BC].
 $\angle EAC \equiv \angle ECA$. $\angle DAE = 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - (\angle EAC + \angle ECA) = 90^\circ - (\angle C + \angle C) = 90^\circ - \angle C - \angle C = \angle B - \angle C$.
2. Fie G mijlocul lui AD. $GE = \frac{DC + AB}{2} \Rightarrow GE = \frac{1}{2} AD$. Se demonstrează ușor că $m(\angle AED) = 90^\circ$. În triunghiul dreptunghic FDE: $FE^2 = FD^2 + ED^2$. În triunghiul dreptunghic AED: $AD^2 = AE^2 + ED^2$. Cum $AE \equiv FD \Rightarrow FE \equiv AD$.
 $DF \perp (ABCD)$ (1); $DE \perp AE$ (2); $DE, AE \subset (ABCD)$ (3) \Rightarrow Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow FE \perp AE$.

TEST NR. 55

- I. 1. 6 și 24. 2. $\sqrt{11} - \sqrt{5} - 2$. 3. $\sqrt{13} - 7 < \sqrt{15} - 8$.
- II. 1. 100 000 lei. 2. $m = 2$.
- III. 1. 3, 4, 5. 2. $A_1 = \pi G(R + r) = \pi \cdot 25(R + r) = 225\pi \Rightarrow R + r = 9$. $G^2 = h^2 + (R - r)^2 \Rightarrow 625 = 576 + (R - r)^2 \Rightarrow R - r = 7$. Deci $R = 8$, $r = 1$. $V_{\text{cilindru}} = \frac{\pi \cdot 24}{3} (64 + 1 + 8) = 584\pi$.

TEST NR. 56

- I. 1. $x^2 + 1$. 2. 15 zile. 3. $m^2x + 3 = 9x + m \Leftrightarrow x(m^2 - 9) = m - 3 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 3) \cdot x = m - 3$. Pentru $m = -3$ ecuația nu are soluții reale.
- II. 1. $mx + 1 \leq x + m \Leftrightarrow x(m - 1) \leq m - 1$. Dacă $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m \in [1, \infty)$ obținem $x \in (-\infty, 0]$. Dacă $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1)$ obținem $x \in [0, \infty)$. Dacă $m = 1$ obținem $x \in \mathbb{R}$. 2. $m = 0$, $m = 1$.
- III. 1. Fie $\{B'\} = BH \cap AC$, $\{C'\} = CH \cap AB$.
 $90^\circ - \angle MAB' = \angle AMB' \Rightarrow \angle AMB' = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC \Rightarrow \angle HMN = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$.
 $\angle HNM = \angle C'NA = 90^\circ - \angle C'AN = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$.
 Deci $\angle HNM \equiv \angle HMN \Rightarrow \triangle HMN$ este isoscel. 2. $V = 162 \text{ cm}^3$.

TEST NR. 57

- I. 1. $(a^{10} + a^{11} + \dots + a^{20}) : (a^0 + a^1 + \dots + a^{10}) = a^{10} (a^0 + a^1 + \dots + a^{10}) : (a^0 + a^1 + \dots + a^{10}) = a^{10}$.

2. $x = 9$. 3. $A \cap B = \{39, 40, \dots, 98, 99\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, \dots, 122, 123\}$. $A \setminus B = \{0, 1, \dots, 38, 100, 101, \dots, 123\}$; $B \setminus A = \emptyset$.

II. 1. $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. 2. $a = 5$, $b = -3$.

III. 1. Fie $AD \cap BC = F$. $\angle BAF = 90^\circ - \angle ABC$. $\angle ACE = 90^\circ$ deoarece AE este diametru.

$\angle CAE = 90^\circ - \angle AEC = 90^\circ - \angle ABC$ deoarece $\angle AEC \equiv \angle ABC$.

Deci: $\angle CAE \equiv \angle BAF$ (1); $\angle BAE = \angle BAF + \angle DAF$ (2); $\angle CAD = \angle CAE + \angle DAF$ (3).

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \angle BAE \equiv \angle CAD$.

$$2. A = \frac{16a^2\pi^5}{4\pi^2 - 1}; V = \frac{32a^3\pi^6\sqrt{4\pi^2 - 1}}{9(4\pi^2 - 1)^2}$$

TEST NR. 58

I. 1. Fie $n - 1$, n și $n + 1$ cele trei numere. Trebuie să demonstrăm că $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) : 3$ (1). La împărțirea prin 3 numărul natural n poate să dea resturile 0, 1, sau 2. Deci n poate fi de forma $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$. Înlocuind pe n cu una din aceste forme se obține ușor

concluzia. 2. $\frac{x}{y} = \frac{14}{4}$. 3. $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$.

II. 1. Fie a , b lungimiile catetelor, h lungimea înălțimii dusă din vârful drept iar c lungimea ipotenuzei. Trebuie să demonstrăm că $h \leq \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{a \cdot b}{c} \leq \frac{c}{2} \Leftrightarrow 2ab \leq c^2 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ - adevărat. Avem egalitate în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

$$2. X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^3 - 2X = (X^2 + 1)^2 - 2X(X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 1) = (X^2 + 1)(X - 1)^2$$

III. 1. Patrulaterul AEHD este inscriptibil $\Rightarrow \angle EAD + \angle EHD = 180^\circ$ (1). Patrulaterul ABGC este inscriptibil $\Rightarrow \angle EAD + \angle BGC = 180^\circ$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \angle EHD \equiv \angle BGC$. Dar $\angle EHD \equiv \angle BHC$ (3). Deci $\angle BGC \equiv \angle BHC$. În triunghiul ABD: $\angle ABD = 90^\circ - \angle A$. În triunghiul ACE: $\angle ACE = 90^\circ - \angle A$.

Deci $\angle ABD \equiv \angle ACE$. AG fiind diametru $\Rightarrow \angle ABG \equiv \angle ACG = 90^\circ$. $\angle HBG = 90^\circ - \angle ABD$. $\angle HCG = 90^\circ - \angle ACE$ și cum $\angle ABD \equiv \angle ACE \Rightarrow \angle HBG \equiv \angle HCG$ (4). Din relațiile (3) și (4) \Rightarrow patrulaterul BHCG este un patrulater cu unghiurile opuse congruente, deci el este paralelogram.

$$2. \frac{4}{3}\pi(31^3 - 30^3)\text{mm}^3$$

TEST NR. 59

I. 1. Calcul direct. $2a + b$ - impar $\Rightarrow a$ - par și b impar sau a impar și b par. În ambele cazuri $a \cdot b$ este un număr par. 3. Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ există $m, n \in \mathbb{Z}$, m, n prime

între ele astfel încât $\frac{m}{n} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 5 \Rightarrow m^2 = 5n^2 \Rightarrow 5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \Rightarrow m = 5k$, $k \in \mathbb{N}$.

Deci $(5k)^2 = 5n^2 \Rightarrow 25k^2 = 5n^2 \Rightarrow 5k^2 = n^2 \Rightarrow 5 \mid n^2 \Rightarrow 5 \mid n$. Dar $5 \mid m$ - contradicție cu $(m, n) = 1$. Deci $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

II. 1. $\frac{1}{x+1}$. 2. $P(-1) = P(0) = 0$.

III. 1. Fie E intersecția bisectoarelor duse din vârfurile A și B ale paralelogramului ABCD.

$$\angle AEB = 180^\circ - (\angle EAB + \angle EBA) = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \cdot \angle DAB + \frac{1}{2} \cdot \angle CBA\right) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle DAB + \angle CBA) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \text{ Deci } AE \perp BE.$$

2. Fie piramida VABC cu baza ABC ($\angle A = 90^\circ$, $AB \equiv AC$). Presupunem că $VC \perp (ABC)$.

$$VA = a\sqrt{2}, VB = a\sqrt{3}, VC = a. V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

TEST NR. 60

I. 1. $8x1y:15 \Rightarrow 8x1y:5$ și $8x1y:3$.

$$8x1y:5 \Rightarrow y \in \{0,5\}. 8x1y:3 \Rightarrow 8+x+1+y:3 \Rightarrow x+y \in \{0,3,6,9,12,15,18\}.$$

Se găsesc numerele 8010, 8310, 8610, 8910, 8115, 8415, 8715.

2. 10 m. 3. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14\}$; $A \cap B = \{3, 6\}$; $A \setminus B = \{4, 5, 8, 14\}$; $B \setminus A = \{1, 2\}$
 $A \times B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 6),$
 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 6), (14, 1), (14, 2), (14, 3), (14, 6)\}.$

II. 1. Inecuația nu are soluții. 2. Se folosește faptul că aria unui triunghi este semiprodusul dintre înălțime și latura pe care cade.

III. 1. a) Notăm $CP = x$. Din trapezele dreptunghice BCPM și CDNP se obține $MP^2 = a^2 + (x - 2a)^2$ și $NP^2 = 4a^2 + (3a - x)^2$. Cum $MP \equiv NP$ rezultă că $a^2 + (x - 2a)^2 = 4a^2 + (3a - x)^2 \Rightarrow x = 4a \Rightarrow MP \equiv NP = a\sqrt{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} (ADNQ) \parallel (BCPM) \\ b) (ADNQ) \cap (MNP) = NQ \\ (BCPM) \cap (MNP) = MP \end{array} \right\} \Rightarrow NQ \parallel MP. \text{ Analog } MQ \parallel NP.$$

Deoarece $NP \parallel QM$, $QN \parallel MP$, $NP \equiv PM \Rightarrow MNPQ$ este romb. În trapezul dreptunghic ABMQ: $QM^2 = AB^2 + (MB - AQ)^2$. $MB - AQ = a$. Cum $MB = 2a \Rightarrow AQ = a$.

c) Fie $AR \perp BD$, $R \in BD$. $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$.

Se observă că $AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow AD \perp DB \Rightarrow R = D$.

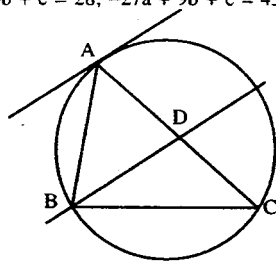
$$\left. \begin{array}{l} QA \perp (ABCD) \\ AD \perp DB \\ DB \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow QD \perp DB. d(Q, DB) = QD = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Analog } PB \perp DB. d(P, DB) = \sqrt{a^2 + 16a^2} = a\sqrt{17}.$$

2. Latura tetraedrului are valoarea $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$. $V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.

TEST NR. 61

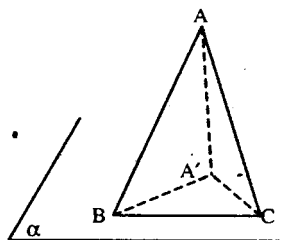
- I. 1. $\frac{27n+65}{8} = 3n+8 + \frac{3n+1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3n+1 \in \{8, 16, 24, \dots\}$. $3n+1 = 16 \Rightarrow n=5$.
2. Valoarea de adevăr este fals deoarece $|x+18| + |x-4| > 0$
3. Dacă $x < 0 \Rightarrow f(x) = x+1$ care este crescătoare, $f(x) < 1$.
Dacă $x \in [0, 4] \Rightarrow f(x) = 1$.
Dacă $x \in (4, \infty) \Rightarrow f(x) = 2x-1$ este crescătoare, $f(x) > 1$.
Deci $f(x)$ este crescătoare pe \mathbb{R} .
- II. 1. $3 \cdot 9^a + 5 \cdot 17^a = 3(8+1)^a + 5(2 \cdot 8+1)^a = 3(M8+1) + 5(M8+1) = M8+3+5 = M8$.
2. $X^3 + 6X^2 + 11X + 6 = (X+1)(X+2)(X+3)$; Punem condițiile $P(-1) = 0$; $P(-2) = 0$; $P(-3) = 0$ și obținem sistemul: $-a+b+c=9$; $-8a+4b+c=28$; $-27a+9b+c=45$ de unde obținem soluția $a=2$, $b=11$, $c=0$.
3. $a^3 + 3ab + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = 1$.
- III. 1. $\triangle ABD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD$.
2. Fie A' proiecția lui A pe planul α . În $\triangle AA'B$, $\triangle AA'C$ dreptunghice rezultă: $A'B^2 = 8^2 - AA'^2$ și $A'C^2 = 7^2 - AA'^2$ de unde obținem: $A'B^2 - A'C^2 = 64 - 49 = 15$.
În $\triangle BA'C$ ($\angle BA'C = 90^\circ$) avem: $A'B^2 + A'C^2 = 25$.



Din ultimele două relații obținem:

$$A'B^2 = 20 \text{ și } A'C^2 = 5 \Rightarrow A'B \cdot A'C = 10.$$

$$\text{Deci } A(BA'C) = \frac{A'B \cdot A'C}{2} = 5 \text{ cm}^2.$$



TEST NR. 62

- I. 1. $2a - 3b + 8c = 0 \Leftrightarrow 2a + 8c = 3b \Leftrightarrow 2(a+4c) = 3b \Leftrightarrow 2 \mid b \text{ și } 3 \mid (a+4c) \Leftrightarrow 2 \mid b \text{ și } 3 \mid (a+c) + 3c \Leftrightarrow 2 \mid b \text{ și } 3 \mid (a+c) \Leftrightarrow 6 \mid b(a+c)$.
2. Suma după fiecare an reprezintă $105\% = 1,05$ din anul anterior. După 3 ani suma devine $1,05^3 \cdot 100\$ = 115,7625\$$.
3. $a^2 \leq b \Rightarrow a^4 \leq b^2 \leq c$; dar $c \leq a^2 \Rightarrow a^4 \leq b^2 \leq c \leq a^2 \Rightarrow a^4 \leq a^2 \Rightarrow a^2(a^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow a \in [-1, 1] \cap \mathbb{N}^+ \Rightarrow a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.
- II. 1. Fie $A^2 = a^2 + b^2 + c^2$; cum a, b, c sunt cifre rezultă: $A^2 \leq 9^2 + 9^2 + 9^2 = 243 < 256$; deci $A \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, dar A fiind de forma $3k+2$ mai rămân posibilitățile $A \in \{2, 5, 11\}$. Considerând fiecare caz în parte găsim soluțiile: 200, 269, 296, 304, 340, 403, 430, 500, 629, 667, 676, 766, 792, 926, 962.

- III. 1. $BC = 10$ cm. Centrul cercului circumscris triunghiului este la mijlocul lui BC și atunci: $OA = OB = OC = 5$. Exprimând aria triunghiului în două moduri obținem relația:

$$AD \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{24}{5}$$

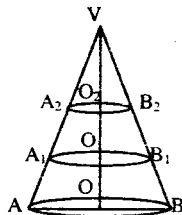
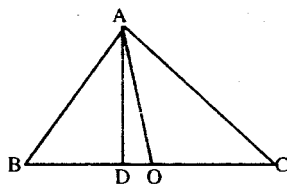
$$\text{Din } \triangle ADO \text{ obținem: } DO = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \frac{7}{5}.$$

$$2. \text{ Notăm } V_1 = V_{\text{con}}(VA_1B_1); V_2 = V_{\text{con}}(VA_2B_2);$$

$$V_3 = V_{\text{urcon}}(A_1B_1A_2B_2). \text{ Evident } V_3 = V_1 - V_2.$$

$$\text{Dar } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{VO_1}{VO} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}; \quad \frac{V_2}{V} = \left(\frac{VO_2}{VO} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow \frac{V_3}{V} = \frac{V_1}{V} - \frac{V_2}{V} = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} \Rightarrow V_3 = \frac{7V}{27}$$



TEST NR. 63

I. 1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$

2. a) $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$, adevărat.

b) $x + y = k$ din relația a) $\Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{k^2}{4}.$

3. $Q(X) = (X-1)(X-4)$; $P(X)$ se divide cu $Q(X)$ dacă $P(1) = 0$; $P(4) = 0$, de unde rezultă

$$\text{sistemul } \begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=-64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-22 \\ b=24 \end{cases}$$

- II. 1. $x > 0, y > 0, x + y = 1$ inegalitatea se transcrie echivalent:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{2}{xy} \geq 8 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$$

inegalitate ce se obține ușor din inegalitatea mediilor: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$

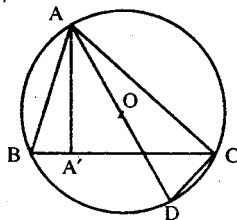
2. Produsul $k(k+1)(k+2)$ se divide prin 6, ca produs a trei numere naturale consecutive. Atunci N fiind suma a n produse divizibile cu 6, rezultă $N \mid 6$.

III. 1. a) $A'B^2 = AB^2 - AA'^2$; $A'C^2 = AC^2 - AA'^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A'B^2 - A'C^2 = (AB^2 - AA'^2) - (AC^2 - AA'^2) =$
 $= AB^2 - AC^2.$

b) Se observă că triunghiurile ABA' și ADC

sunt asemenea și atunci $\frac{AB}{AD} = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AA' \Rightarrow AB \cdot AC = 2R \cdot AA'.$$



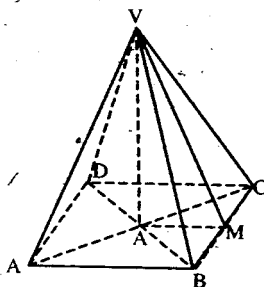
2. Fie VABCD piramida patrulateră regulată, VO înălțimea piramidei și $OM \perp BC$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $VM \perp BC$. Notăm cu a latura bazei și avem:

$$S = A_1 + A(ABCD) = \frac{4a \cdot VM}{2} + a^2 = 2a \cdot VM + a^2.$$

ΔVBC este echilateral și deci $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Înlocuind

în relația de mai sus obținem $a = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}+1}}$; din ΔVOM

se calculează: $VO = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$.



TEST NR. 64

I. 1. $a = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^n)^{\frac{1}{2}}$; $b = 1998 + 2 \cdot \frac{1998 \cdot 1997}{2} = 1998^2$. 2. $a = 6$; $b = 10$; $c = 14$.

II. 1. 273, 354, 435, 516. 2. $l_3 = 1$; $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $l_4 = \sqrt{2}$; $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $l_6 = \sqrt{3}$; $a_6 = \frac{1}{2}$.

III. 1. $m = -\frac{6}{5}$; $n = -\frac{12}{5}$. 2. a) $A_1 = 144\sqrt{2} \text{ cm}^2$; $A_1 = 144(\sqrt{2}+1) \text{ cm}^2$ b) $V_1 = 288 \text{ cm}^3$.

c) Notând cu l_4' latura pătratului de secțiune, avem: $\frac{l_4}{12} = \frac{1}{3}$; $l_4' = 4 \text{ cm}$; $A_{\text{secțiune}} = 16 \text{ cm}^2$;

d) $V_2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{27}$. e) $V_{\text{trunchi}} = 277\frac{1}{3} \text{ cm}^3$.

TEST NR. 65

I. 1. 123 și 329. 2. 450, 240, 1080, 210.

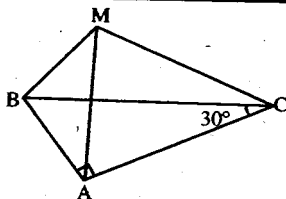
II. 1. $a = 1$; $b = -2\sqrt{2}$; $a^2 - b^2 = -7$.

2. Se observă că triunghiul ABC este dreptunghic ($m(\angle A) = 90^\circ$), iar triunghiurile ABC și MBC sunt congruente.

III. 1.a) $x \in (1/2; 2)$; b) $x \in \mathbb{R} - (1; 2]$.

2. a) Se construiește $OM \perp BC$ și, conform teoremei celor trei perpendiculare, $VM \perp BC$, deci unghiul diedru poate fi măsurat prin unghiul OMV, prin urmare: $\sin \angle OMV = \frac{VO}{VM}$, iar în

ΔVOM ($VO \perp VM$), $VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow VM = 20 \text{ cm}$, deci $\sin \angle OMV = \frac{4}{5}$.



b) Unghiul format de o muchie cu planul bazei este, spre exemplu: $\angle VAO$ și

$$\operatorname{tg} \angle VAO = \frac{VO}{AO} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

c) Mai întâi trebuie aflată latura bazei mici. VO și VM determină un plan și în triunghiul

$$VOM (\angle O = 90^\circ), OM \parallel ON \Rightarrow \frac{VO_1}{VO} = \frac{ON}{OM} = \frac{VN}{VM} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{ON}{12} = \frac{VN}{20} \Rightarrow ON = 3 \text{ cm};$$

$VN = 5 \text{ cm} \Rightarrow A'B' = 6 \text{ cm}$. $NM = 15 \text{ cm}$. Fețele laterale sunt trapeze cu bazele de 24 cm și 6 cm, iar înălțimea $NM = 15 \text{ cm}$.

d) Secțiunea este trapezul $ACC'A'$ cu bazele $AC = 24\sqrt{2} \text{ cm}$, $A'C' = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ și înălțimea $OO_1 = VO - VO_1 = 12 \text{ cm}$.

TEST NR. 66

I. 1.a) $\sqrt{3+4\sqrt{5}} = \sqrt{5+2 \cdot 2\sqrt{5}+4} = \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}+2$; b) 0,14.

2. $a = 0,3$; b; $b - a = 35$; de unde $b = 50$; $a = 15$. 3. $x = 5$; $y = 3$.

II. 1. $x^2 + x = t \Rightarrow P(x) = (t+1)(t+3) + 1 = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 = (x^2 + x + 2)^2$.

2. $b + c = 14$; $b - c = 2 \Rightarrow b = 8$; $c = 6$ și $\text{Aria} = \frac{b \cdot c}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

3. $a + b + c = 9$; $b + c = 23$; deci $a = -14$.

III. 1. $\text{Aria}_{(MBA)} = \frac{BM \cdot BA}{2} = 30 \text{ cm}^2$. 2. $MB \perp (ABC) \Rightarrow (MBA) \perp (ABC) \Rightarrow CP \perp$ dreapta de

intersecție a celor două plane. $AB \perp (MBA)$. CP se calculează scriind aria $\triangle ABC$ în două

moduri $\Rightarrow CP = 9,6$. 3. $\text{Vol} = \frac{S_{(MBA)} \cdot CP}{3} = 96 \text{ cm}^3$ sau $V_{(ABCM)} = \frac{S_{(ABC)} \cdot MB}{3}$.

TEST NR. 67

I. 1. 48. 2. $x = 7$; $y = 5$.

II. 1.a) Se pornește de la $(x - y)^2 \geq 0$. b) $(x - y)^2 \geq 0$; $(x - z)^2 \geq 0$; $(y - z)^2 \geq 0$. Se adună inegalitățile membru cu membru.

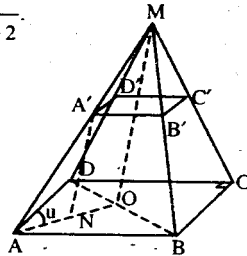
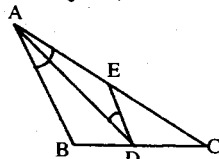
2. Construim $DE \parallel AB$. Triunghiul ADE este isoscel ($AE \equiv DE = a$). Se observă că triunghiurile CED și CAB sunt asemenea, iar din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $a = 2$, apoi ne folosim de inegalitățile dintre laturile triunghiului ADE.

III. 1. $\frac{(x^2 + x + 1)^2 - 1}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4} = \frac{(x^2 + x)(x^2 + x + 2)}{(x^2 + x + 2)^2} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 2}$.

2. a) $i = 40$, $a_p = 41$; $m = \sqrt{1762}$.

b) $A_{\text{lat}} = 1804 \text{ cm}^2$; $A_{\text{tot}} = 2208 \text{ cm}^2$.

c) $V = 5914,08 \text{ cm}^3$, $A_{\text{lat}} = 1822,2 \text{ cm}^2$. d) $\sin u = 0,95$.



TEST NR. 68

I. 1.a) 30; b) 20; c) 75. 2. 276.

II. 1. a) 1; b) 0. 2. Se construiește $CE \parallel AD$ ($E \in AB$) și se folosesc inegalitățile între laturile triunghiului CEB.

III. 1. 5. 2. a) Construim $PD \perp BC \Rightarrow T3 \perp \Rightarrow MD \perp BC$.

$$\angle [(MBC), (ABC)] = \angle MDP. \operatorname{tg} \angle MDP = \frac{20}{9}.$$

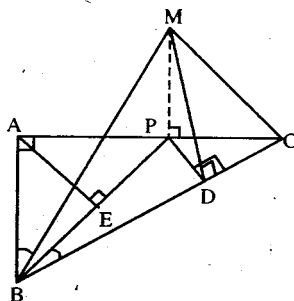
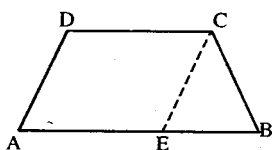
$$b) (MPB) \perp (ABC), d[A, (MPB)] = AE = \frac{9\sqrt{5}}{5} \quad (E \in BP).$$

c) $MP \perp (ABC)$; $MP \subset (MPD) \Rightarrow (MPD) \perp (ABC)$

$$\angle [MB, (MPD)] = \angle (MB, MD) = \angle BMD.$$

$$\sin \angle BMD = \frac{18\sqrt{805}}{805}.$$

$$d) A = \frac{45}{2}(2\sqrt{5} + 13) \text{ cm}^2; \quad V = \frac{675}{2} \text{ cm}^3.$$



TEST NR. 69

I. 1. 67. 2. 4.

II. 1. $E = \frac{9}{x-2}$; $x \in \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$.

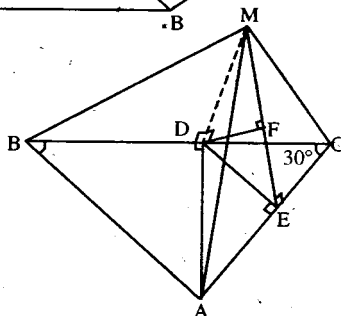
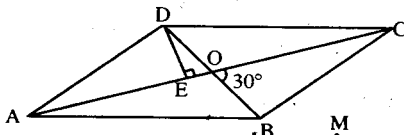
$$2. S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ADC} = DE \cdot AC = 40 \text{ cm}^2.$$

III. 1. $-\frac{35}{27}$. 2. a) $d(D, (MAC)) = \frac{4\sqrt{21}}{7}$;

b) Fie $DF \perp (MAC)$, $\angle [MD, (MAC)] = \angle DMF$,

$$\sin \angle DMF = \frac{\sqrt{21}}{7};$$

$$c) A_{\text{tot}} = 16(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \text{ cm}^2; \quad V = \frac{64\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

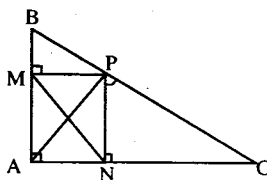


TEST NR. 70

I. 1. a) 24; b) 1285. 2. 18 muncitori.

II. 1. a = 5; b = 1. 2. Se observă că triunghiul ABC este dreptunghic, iar ANPM este un dreptunghi, deci $MN \equiv AP = \sqrt{6} \text{ cm}$.

$$\text{II. 1. } \frac{5}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 8.$$



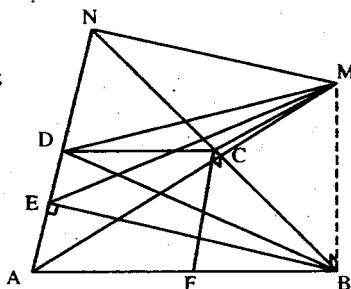
2. a) Fie $AD \cap BC = \{N\}$, $\angle BNA = 90^\circ$,
 $d(M, AD) = MN = 26$

b) $(MBD) \perp (ABD)$. Fie $AA' \perp BD$, $AA' = \frac{48\sqrt{17}}{17}$;

$\sin \angle ADA' = \frac{AA'}{AD} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

c) $\lg \angle [(MAB), (MDC)] = \frac{24}{25}$.

d) $A = 647 \text{ cm}^2$; $V = 640 \text{ cm}^3$.



TEST NR. 71

- I. 1. -1. 2. 120 000 lei și 180 000 lei. 3. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- II. 1. Dacă $m = -5$ ecuația admite ca soluție orice număr real.

Dacă $m = 3$ ecuația nu are soluții reale. Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 3\}$ ecuația are soluție unică

$x = \frac{1}{m-3}$. 2. Nu.

- III. 1. $\triangle ADE \equiv \triangle CEB$, pentru că
- $$\begin{cases} AD \equiv CE \\ \angle DAC \equiv \angle BCE. \text{ Deci } \angle EBC \equiv \angle ACD. \\ AC \equiv BC \end{cases}$$

Dar $\angle ACD + \angle MCB = 60^\circ \Rightarrow \angle MBC + \angle MCB = 60^\circ \Rightarrow \angle BMC = 120^\circ$.

2. $\sqrt{2(4 + \sqrt{202})}$.

TEST NR. 72

- I. 1. $\sqrt{96 - \sqrt{6 + \sqrt{9}}} = \sqrt{93}$. 2. 200 000 lei. 3. $(2 - \sqrt{3})(x - 1) = \begin{cases} (2 - \sqrt{3})(x - 1), & \text{pentru } x \geq 1 \\ (\sqrt{3} - 2)(x - 1), & \text{pentru } x < 1 \end{cases}$

$1 - x \models x \models \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

- II. 1. $A(0, -3)$ și $B(3/2, 0)$. 2. $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$.

- III. 1. $\triangle ABC \sim \triangle TAC \Rightarrow \frac{TC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = TC \cdot BC$.

2. Fie VABCD piramida patrulateră regulată cu vârful în V și cu latura bazei $AB = a$. Ducem

$AF \perp VB \Rightarrow CF \perp VB$. Triunghiul AFC este isoscel și $\angle AFC = 120^\circ$. $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{OA}{AF} = \sin 60^\circ \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Fie } G \text{ mijlocul lui } AB. \Delta VGB \sim \Delta AFB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{VG}{AF} = \frac{GB}{FB} \Rightarrow VG = AF \cdot \frac{GB}{FB}.$$

$$FB = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad VO = \sqrt{VG^2 - GO^2} = \frac{a}{2}. \quad V_{VABCD} = \frac{1}{3} VO \cdot S_{ABCD} = \frac{a}{6}.$$

TEST NR. 73

- I. 1. a) $\frac{25\sqrt{7}}{84}$; b) 2. 2. Calcul direct. 3. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$.
- II. 1. $x \in (0, \infty)$. 2. $a = 2$; $b = -4$; $c = 6$.
- III. 1. Se demonstrează cu $\angle APC \equiv \angle CAP$. 2. $\frac{45}{2}$ cm.

TEST NR. 74

- I. 1. $2\sqrt{11} - 6 > 0$; $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} > 0$. 2. $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$; $x^3 + y^3 = s^3 - 3sp$. 3. $A = \frac{300}{11} \text{ cm}^2$.
- II. 1. Se iau ca necunoscute $\frac{x}{a+b}$ și $\frac{y}{a-b}$. Obținem $x = \frac{a}{a-b}$, $y = \frac{b}{a+b}$.
2. Câtul este $2X^2 - 4X - 1$ iar restul 0.
- II. 1. 140, 105 și 49 cm. 2. $V = \frac{485\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. $A_1 = 110\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

TEST NR. 75

- I. 1. -1 dacă p este impar și 1 dacă p este par. 2. 16 000 lei. 3. Să presupunem că există $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ astfel încât fracția să fie număr întreg $\Rightarrow 2n+3 \mid 3n+2 \Rightarrow 2n+3 \mid 2(3n+2) \Rightarrow 2n+3 \mid 6n+4$
 $2n+3 \mid 2n+3 \Rightarrow 2n+3 \mid 3(2n+3) \Rightarrow 2n+3 \mid 6n+9$. Deci $2n+3 \mid (6n+9) - (6n+4) \Rightarrow 2n+3 \mid 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2n+3 \in \{1, 5\}$. $2n+3 \neq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
 Dacă $2n+3 = 5 \Rightarrow n = 1$ dar $n \neq 1$ din ipoteză.
 Deci oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ fracția $\frac{3n+2}{2n+3} \notin \mathbb{Z}$.
- II. 1. $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. $P(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 35 - 14\sqrt{6} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
- III. 1. Unim pe M cu C și pe N cu B . $\angle MAB \equiv \angle NAC$ (1)
 Dar $\angle NAC \equiv \angle NMC \equiv \angle NBC$ (2) și $\angle MAB \equiv \angle MCB$ (3).
 Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \angle NMC \equiv \angle MCB \Rightarrow MN \parallel BC$.

$$2. A_1 = a^2 \sqrt{15}; \quad V = \frac{a^3 \sqrt{14}}{6}.$$

TEST NR. 76

I. 1. Nu totdeauna.

$$2. 72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n = 3^{2n} \cdot 2^{3n} + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 2^{3n+1} \cdot 3^{2n} = 3^{2n} \cdot 2^{3n} \cdot (1 + 3 \cdot 2 + 2^3) = 15 \cdot 2^{3n} \cdot 3^{2n} : 15.$$

$$3. \frac{3^n}{4^n} \leq \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} \Leftrightarrow 3^n \cdot (4^n + 1) \leq 4^n \cdot (3^n + 1) \Leftrightarrow 3^n \cdot 4^n + 3^n \leq 3^n \cdot 4^n + 4^n \Leftrightarrow 3^n \leq 4^n \text{ adevărat}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

II. 1. $a = b = 0$. 2. $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0 \Leftrightarrow (b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos A)^2 - 4b^2c^2 < 0 \Leftrightarrow 4b^2c^2 \cdot \cos^2 A < 4b^2c^2 : 4b^2c^2 \Leftrightarrow \cos^2 A < 1$ - adevărat.

III. 1. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 2. a, a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Muchiile feței perpendiculare pe planul bazei fac unghiuri de 60° cu baza. Celelalte două muchii fac unghiuri ale căror sinusuri au valoare de $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

TEST NR. 77

I. 1. Nu totdeauna. De exemplu $-3 < -1$, dar $(-3)^2 > (-1)^2$.

$$2. \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k. \quad \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = k^2. \quad \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \left(\frac{kc+kd}{c+d} \right)^2 = \left[\frac{k(c+d)}{c+d} \right]^2 = k^2.$$

3. 60.

II. 1. $x(m-2) = 3m+1$. Dacă $m=2 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale. Dacă $m \neq 2 \Rightarrow$ ecuația are soluția $x = \frac{3m+1}{m-2}$. $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-2 \mid 3m+1 \Leftrightarrow m \in \{-5, 1, 3, 9\}$.

2. Suma coeficienților unui polinom $P(X) = a_n \cdot X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ este $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. În cazul nostru $P(1) = 3$.

III. 1. Se folosește faptul că într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc.

2. $V = a^3\sqrt{2}$. Unghiul făcut de o muchie cu planul bazei este de 45° . Unghiurile fețelor au valorile 60° și 120° .

TEST NR. 78

I. 1. a) Nu neapărat. De exemplu $(-5)^2 = 5^2$, dar $-5 \neq 5$. b) $\sqrt{x^2} = |x|$. 2. 15. 3. $m = -1$.

II. 1. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 10$. 2. Aplicând teorema împărțirii cu rest polinoamelor $P(X)$ și $(X-a)(X-b) \Rightarrow$ există α și β astfel încât $P(X) = (X-a)(X-b) \cdot C(X) + \alpha X + \beta$.
 $X-a \mid P(X) \Rightarrow P(a) = 0 \Rightarrow \alpha a + \beta = 0 \quad (1)$

$$X - b \mid P(X) \Rightarrow P(b) = 0 \Rightarrow \alpha b + \beta = 0 \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \alpha(a - b) = 0$. Cum $a \neq b \Rightarrow \alpha = 0$. Cum $\alpha a + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

Deci $(X - a)(X - b) \mid P(X)$.

- II. 1. $AE^2 + AF^2 = FE^2 = AD^2$ deoarece patrulaterul AFDE este dreptunghic și deci $FE \equiv AD$.

$$2. A_1 = \pi 3(3 + 6) = 27\pi \text{ cm}^2. V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 79

- I. 1. Să se calculeze fiecare membru al egalității. 2. $x = 4/9$.

3. Fie $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1$ numărul. $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 + 8(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) =$
 $= 10^{n-1} \cdot a_n + 8a_n + 10^{n-2} \cdot a_{n-1} + 8a_{n-1} + \dots + 10a_2 + 8a_2 + a_1 + 8a_1 = (10^{n-1} + 8) \cdot a_n +$
 $+ (10^{n-2} + 8) \cdot a_{n-1} + \dots + (10 + 8) \cdot a_2 + 9 \cdot a_1 : 9$ deoarece $10^k + 8 : 9$ oricare ar fi numărul

natural k ($10^k + 8 = 1000\dots008$ și se aplică criteriul de divizibilitate cu 9).

$k-2$ cifre

- II. 1. $P(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X^2 - 2X + 1)^2 = (X - 1)^4$. 2. Sistemul nu are soluții reale.

- III. 1. Fie M, N, P, Q proiecțiile lui O pe laturile AB, BC, CD, respectiv DA.

$$m(\angle ONP) = m(\angle OCP)$$

$$m(\angle ONM) = m(\angle OBA)$$

$$m(\angle OQM) = m(\angle OAM)$$

$$m(\angle OQP) = m(\angle ODP)$$

Adunând membru cu membru cele patru egalități și ținând cont de faptul că $m(\angle OBA) + m(\angle OAM) = 90^\circ$ și că $m(\angle OCP) + m(\angle ODP) = 90^\circ$ rezultă că $m(\angle MNP) + m(\angle MQP) = 180^\circ \Rightarrow$ patrulaterul MNPQ este inscripșibil.

$$2. V = \left(\frac{a \cdot h}{a + h} \right)^3.$$

TEST NR. 80

- I. 1. 1. 2. Soluțiile sunt 9 și -1. 3. O grupă cu două butoaie pline, 3 butoaie până la jumătate și două butoaie goale, o altă grupă cu trei butoaie pline, unul doar pe jumătate și trei butoaie goale iar o altă grupă cu două butoaie pline, trei butoaie până la jumătate și două butoaie goale.

- II. 1. $x = (a + b)^2$; $y = (a - b)^2$. 2. $a = 0$, iar $b \in \mathbf{R}$ oarecare. Deci obținem funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = b$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

- III. 1. Fie O_1 și O_2 centrele celor două cercuri, r_1 și r_2 razele lor ($r_1 > r_2$) iar A și B punctele de contact ale cercurilor O_1 și O_2 cu tangenta lor comună. Ducem $O_2C \perp O_1A$, $C \in O_1A$. ABO_2C este dreptunghi $O_1C = r_1 - r_2$. În triunghiul dreptunghic O_1CO_2 avem:

$$O_2C^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2 \Rightarrow O_2C^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \Rightarrow O_2C^2 = 4r_1r_2 \Rightarrow O_2C = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2}.$$

2. Lungimea laturii bazei este de 6 cm.

$$A_1 = 9\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2; V = \frac{VA \cdot VB \cdot VC}{6} = 9\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

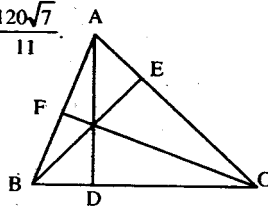
TEST NR. 31

I. 1. 8 elemente. 2. a) $-\frac{2}{3}$; b) Dacă $m = 3$, $x \in \mathbb{Q}$; dacă $m \neq 3$, $x = 1$.

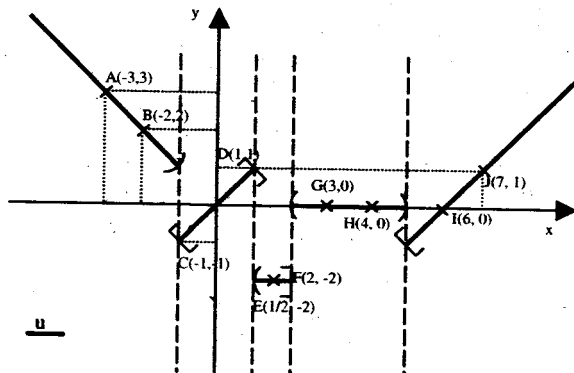
II. 1. $a = 10\sqrt{7}$; $b = 12\sqrt{7}$; $m_a = 11\sqrt{7}$; $m_g = 2\sqrt{210}$; $m_{am} = \frac{120\sqrt{7}}{11}$.

2. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ADB și ADC, obținem $BD = 5$ cm. Astfel putem

calcula $AD = 12$ cm, $BE = \frac{63}{5}$ cm, $CF = \frac{252}{13}$ cm.



III. 1.



2. a) $\text{tg} \angle MNA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, unde $AN \perp BD$ ($N \in BD$).

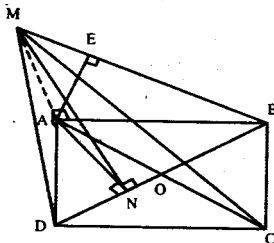
b) $\angle [AM, (MBD)] = \angle AMN$, $(AMN) \perp (MBD)$

$\text{tg} \angle AMN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Fie $AE \perp MB$; $d(A, (MBC)) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

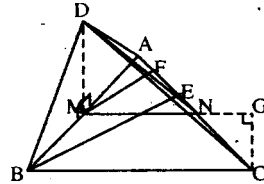
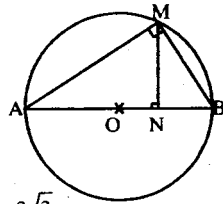
d) $\angle [(MAB), (MDC)] = \angle AMD = 45^\circ$.

e) $A_{\text{tot}} = \frac{25}{2} (3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ cm}^2$. $V = \frac{125\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.



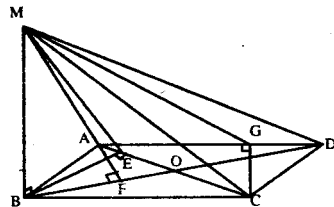
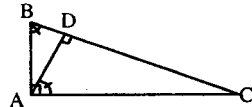
TEST NR. 32

- I. 1. $\{3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{6\}$. 2. 42, 28, 62.
- II. 1. a) 7; b) 8.
2. În triunghiul dreptunghic AMN se aplică teorema înălțimii și teorema catetei, obținându-se rezultatele:
 $MN = 6$ cm, $AM = 6\sqrt{5}$ cm și $BM = 3\sqrt{5}$ cm.
- III. 1. $\{1, 2, 3\}$; $(-2, 3; 0) \cup (0; 5)$; $\{0, 1, 3\}$; $[-3; -2]$; $[-3; 9]$.
2. a) $V_{DABC} = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$; $A_{DAC} = 16 \text{ cm}^2$; $d(B, (DAC)) = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.
- b) $\angle DFM = 30^\circ$, unde $MF \perp AC$.
- c) $(DAB) \perp (ABC)$; $\angle [AC, (DAB)] = \angle CAB = 60^\circ$.
- d) $A = 4(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$; $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.



TEST NR. 33

- I. 1. a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{3}{8}$. 2. 27; 81; 243. 3. 60 elevi.
- II. 1. $S(-1; 1)$.
2. Se observă că triunghiurile DBA și DAC sunt asemenea și se aplică teorema fundamentală a asemănării.
- III. 1. $f(x) = x - \frac{5}{2}$; $A(0, 2) \notin G_f$.
2. a) $\text{tg } \angle [(MAC), (ABC)] = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
- b) $d[A, (MBD)] = 5\sqrt{3}$.
- c) Se exprimă volumul piramidei MADC în două moduri. Fie $CC' \perp (MAD)$; $\sin \angle CMC' = 0,339$.
- d) $A_{\text{tot}} = 10(2 + \sqrt{97} + \sqrt{73} + 8\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. $V = \frac{800\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.



TEST NR. 34

1B, 2C, 3B, 4C, 5B, 6B, 7A, 8B, 9A, 10A.

TEST NR. 35

1C, 2C, 3C, 4C, 5A, 6C, 7C, 8B, 9A.

$$10: A_{lt} = 64\sqrt{2}, V_t = \frac{392}{3}, A_{lp} = 100\sqrt{2}, V_p = \frac{500}{3}.$$

TEST NR. 86

1BC, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 8C, 9B.

$$10: h = 5\sqrt{3}, V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}, A_t = 75\pi, \angle = 180^\circ.$$

TEST NR. 87

1C, 2C, 3C, 4B, 5C, 6B, 7C, 8B, 9C.

TEST NR. 88

$$1C, 2C, 3B, 4D, 5D, 6B, 7A, 8D, 9C, 10: a) 16\sqrt{7} \text{ cm}^2; b) \frac{3\sqrt{21}}{7}; c) \sqrt{6}.$$

TEST NR. 89

$$1C, 2D, 3C, 4D, 5D, 6D, 7C, 8D, 9D, 10: 1) \text{ Da}; 2) A_t = 100(\sqrt{3} + 1); V = \frac{500\sqrt{2}}{3}.$$

TEST NR. 90

I. 1. a) 1; b) 3/8; c) 3; d) 1. 2. Da. 3. Isoscel.

II 1. Da. 2. Romb, pătrat. 3. ☐ ☒

$$\text{III. 1. } 8 \cdot 9 \cdot \sin 30^\circ + 20 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \sin 30^\circ = 81.$$

$$2. A_\Delta = A_{pr} \cos \theta \Rightarrow l = 4.$$

$$3. 4 \cdot (4 + 6 + 5) = 60. \text{ Da.}$$

TEST NR. 91

1B, 2B, 3A, 4A, 5B, 6A, 7B, 8C, 9B.

TEST NR. 92

1B, 2C, 3A, 4C, 5A, 6B, 7A, 8B, 9A, 10A.

TEST NR. 93

1A, 2A, 3C, 4C, 5B, 6B, 7C, 8A, 9A,

10 a) $h = 3$, $a_1 = 2\sqrt{3}$, b) $A_1 = 54\sqrt{3}$; c) $V = 72\sqrt{3}$.

TEST NR. 94

1D, 2B, 3C, 4B, 5C, 6A, 7B, 8B 9C, 10) $\frac{30\sqrt{70}}{7}$.

TEST NR. 95

I. 1. 6. 2. 3. 60. 3. $\frac{8}{21}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{4}{7}$. II. 1. ϕ . 2. $\frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$. 3. $\frac{1}{x-2}$.

III. 1. $5\sqrt{3}$. 2. 20 și 15. 3. $48\pi \text{ cm}^2$; $\frac{69\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

TEST NR. 96

I. 1. 4. 2. $4\frac{9}{16}$. 3. $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

II. 1. a) $x = 1$; b) $x \in (-\infty, 1|3/2)$. 2. $a = 3$, $b = 6$. 3. a) $x \in \mathbf{R} - \{0, \pm 1\}$; b) $\frac{x+1}{x}$.

III. 1. 24 cm^2 . 2. 6 cm. 3. $2\sqrt{34}$, 240 cm^2 ; 384 cm^2 , 384 cm^3 , $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$.

TEST NR. 97

I. 1. 8, $2\sqrt{7}$, $\frac{5}{24}$. 2. Formule. 3. $\frac{23}{15}$. II. 1. $x \in \left\{\frac{9}{2}\right\}$, $x = 20$, $y = 30$. 2. 14 zile. 3. 30 cm^2 .

TEST NR. 98

I. 1. 3. 2. 5 și 6. 3. $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$, $\{0\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-3\}$.

II. 1. $(4, -1)$. 2. $C(x) = x^3 + 4 - 3x^2$, $R = 0$. 3. $1/3$.

III. 1. 36 cm, $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 2. $10\sqrt{3}$, 600, 1000. 3. 800π , 2560π , 2240π .

TEST NR. 99

- I. 1. $6\sqrt{2} + 16$.
II. 1. $[-1, 1]$. 2. $2\sqrt{7}, 2\sqrt{5}, 30^\circ$. 3. ± 3 .
III. 1. $5\sqrt{3}$. 2. $54^\circ, 36^\circ$. 3. $\frac{1}{5}$.

TEST NR. 100

- I. 1. 1. 2. 100 și 1256.
III. 1. $m_a = 7, m_g = 1$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. 72.

TEST NR. 101

1B, 2C, 3C, 4A, 5A, 6C, 7C, 8B, 9A, 10C.

TEST NR. 102

1A, 2B, 3D, 4B, 5B, 6A, 7B, 8B, 9C, 10B.

TEST NR. 103

- 1B, 2A, 3A, 4B, 5B, 6C, 7A, 8B, 9A.
10. a) 600; 1000. b) $25(\sqrt{3} + 4) \frac{500}{3}$. c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

TEST NR. 104

- 1C, 2A, 3C, 4A, 5A, 6B, 7B, 8C, 9A.
10. a) $9(\sqrt{3} + 4) 3\sqrt{39}$; b) $\frac{3\sqrt{39}}{2}$; c) $\cos u = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

TEST NR. 105

- I. 1. -2. 2. Notăm părțile cu $x, y, z \Rightarrow 2y + y + \frac{3y}{2} = 180 \Rightarrow y = 40; x = 80; z = 60$.
3. $-\sqrt{2} + \sqrt{3}; 4\sqrt{5} - 2\sqrt{19}$.

$$\text{II. 1. a) } F(x) = \frac{4(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{2(x-2)}{x+1} = 2 - \frac{6}{x+1};$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \text{c) } x \in \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}.$$

$$2. a = -1; b = 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1.$$

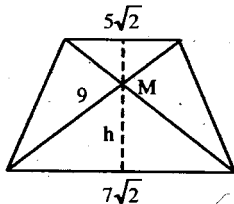
$$\text{III. 1. } h = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 \text{ cm}; S_{\Delta} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2; R = \frac{i_p}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}.$$

2. Secțiunea formată prin diagonale este un trapez isoscel cu bazele congruente cu diagonalele, iar diagonală congruentă cu diagonală trunchiului.

$$h = 3,$$

$$V = 109$$

$$A_t = 24\sqrt{10}$$



TEST NR. 106

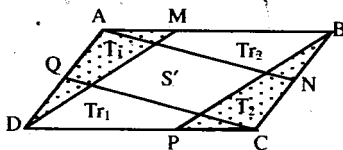
$$\text{I. 1. a) } 0; \text{ b) } -1440. \quad 2. \frac{x-y+y+z+z}{1+4+3} = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow \frac{z}{3} = 3 \Rightarrow z = 9.$$

$$3. \text{ a) } m_a = \sqrt{3}; m_g = 1; m_{am} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{II. 1. a) } a^2 = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}; \text{ b) } m = -120.$$

2. Notăm S' aria paralelogramului format și S aria paralelogramului inițial.

Paralelogramul se descompune în 2 triunghiuri congruente T_1 și T_2 , în 2 trapeze congruente Tr_1 și Tr_2 și paralelogramul S' .



$$S_{\Delta AMD} \equiv S_{\Delta CPB} = \frac{S}{4} \text{ și } S_{Tr_1} = S_{Tr_2} = \frac{3S'}{4}. \quad S = 2 \cdot \frac{S}{4} + 2 \cdot \frac{3S'}{4} + S' \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{1}{5}.$$

III. 1. Se aplică $T3 \perp \Rightarrow MA \perp BC$ (unde $AD \perp BC$).

Unghiul plan corespunzător diedrului este $\angle MDA = 45^\circ$.

2. a) Se notează latura cubului cu x , apoi se aplică asemănarea Δ formate de: înălțimea conului, raza și generatoarea conului cu Δ format de diferența dintre înălțimea conului și latura conului cu jumătate din diagonală bazei cubului.

$$\frac{h-x}{h} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{R} \Rightarrow x = 4. \quad V = 4^3 = 64 \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 107

1B, 2A, 3C, 4C, 5B, 6A, 7B, 8B, 9C, 10A.

TEST NR. 108

1B, 2A, 3C, 4B, 5A, 6B, 7C, 8B, 9C, 10A.

TEST NR. 109

1C, 2B, 3B, 4A, 5C, 6B, 7A, 8A, 9B, 10C.

TEST NR. 110

1B, 2B, 3C, 4B, 5A, 6C, 7B, 8A, 9B,

10. a) $A_1 = 810\pi \text{ cm}^2$; b) $d = 12 \text{ cm}$; c) $k = \frac{1}{27}$.

TEST NR. 111

I. 1. 0. 2. $8(5\sqrt{3} - 9\sqrt{2})$ 3. -200. II. 1. $x \in \{3, 1, 4, 0, 5, -1, 8, -4\}$. 2. $A = (-3, 3)$. 3. $m = 1$.
III. 1. 96 cm^2 . 2. 360. 3. $V = 960 \text{ cm}^3$, $A_1 = 592 \text{ cm}^2$, $d = 2\sqrt{7} \text{ cm}$.

TEST NR. 112

I. 1. $1/6$. 2. 1. 3. -6. II. 1. 2. 2. 2. 3. $(x-2)^2 + 1 > 0$. III. 1. $12\sqrt{5}; 24; 24$. 2. 20, 25, 30.
3. $A_1 = 324(\sqrt{3} + \sqrt{7})$, $V = 1296\sqrt{3}$, $\sin \angle x = \frac{2\sqrt{7}}{7}$; $d = \frac{36\sqrt{21}}{7}$.

TEST NR. 113

I. 1. 21. 2. 2. 3. $\frac{38}{25}$.
II. 1. $\frac{5}{3}$. 2. $\frac{2}{3}$. 3. $x \in \left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$ III. 1. 4. 2. $\frac{24}{5}, 24$. 3. $40\sqrt{3}, 8(\sqrt{3} + 15)$

TEST NR. 114

I. 1. 4, 79. 2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 3. $\frac{13}{9}$.
II. 1. 3; 5. 2. $m = 18$. 3. $a = 2$. III. 1. a) dreptunghi; b) 2. 2. 216, 216. 3. $15\pi, 12\pi$.

TEST NR. 115

1C, 2B, 3A, 4A, 5B, 6B, 7B, 8B, 9B, 10A.

TEST NR. 116

1C, 2A, 3A, 4B, 5C, 6A, 7B, 8B, 9A, 10C.

TEST NR. 117

- I. 1. 1. 2. $\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{12}$ $abc = 36\,000 \Rightarrow a = 20; b = 30; c = 60$. 3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})}{-2}$.
- II. 1. Se folosește inegalitatea $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ($x, y \geq 0$).

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} \geq 2xy; \quad y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{y^2 z^2} \geq 2yz; \quad x^2 + z^2 \geq 2\sqrt{x^2 z^2} \geq 2xz$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \quad | :2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

$$2. P(-2) = 0; P(4) = 0. \quad 3. F(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x-4}$$

- III. 1. MD = 24; MA = 32; MC = 18; MB = 24.

$$2. a) A_p = 6.5; A_1 = \frac{195\sqrt{3}}{4}; A_2 = \frac{135\sqrt{3}}{4}; V = \frac{75\sqrt{3}}{2}; m = \sqrt{61}.$$

$$b) h_{\text{con}} = h_{\text{piramidă}}; R_{\text{con}} = r_{\text{ceroului circumscris}} = 5; \text{generatoarea} = m;$$

$$A_1 = 5\pi(5 + \sqrt{61}) \text{ cm}^2; V = 50\pi \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 118

- I. 1. 1. 2. $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11} \Rightarrow z - x = 42 \Rightarrow x = 35; y = 49; z = 77$. 3. 5; -1.

$$II. 1. \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = \frac{a^4}{a^2 b^2} + \frac{b^4}{a^2 b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}} \geq 2.$$

$$2. a = b = c = d = 1 \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 2x + 1)^2; x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

$$3. m = 1; n = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1.$$

- III. 1. Se aplică asemănarea $\triangle ANB \sim \triangle CND \Rightarrow NA = 14; NC = 7; ND = 4; NB = 8$.

$$2. A_p = 4,1; h = 4; V = 4,32 \text{ cm}^3. \quad 3. A_{\text{sf}} = 36\pi \text{ cm}^2; V = 36\pi \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 119

- I. 1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{x+y+z}{3} = 20; y = 3x; \frac{y+z}{2} = 25 \Rightarrow x = 10; y = 30; z = 20$.

$$\text{II. 1. } \left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{y^2}{x^2}} \cdot 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{x^2}{y^2}} \geq 4xy \geq 4.$$

$$2. \text{ a) } P(2) = 0; P(-2) = 0. \quad \text{b) } F(x) = \frac{(x-2)^2(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = (x-2)(x-1).$$

$$\text{III. 1. } h = 5\sqrt{3}.$$

$$2. \text{ a) } AP, CP \text{ sunt mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză } SB; \frac{a^2\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{b) } A_1 = a^2(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2}), V = \frac{4a^3}{3} \text{ cm}^3.$$

TEST NR. 120

$$\text{I. 1. } 50. \quad 2. \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{12} \text{ și } y + z = 380 \Rightarrow x = 80; y = 140; z = 240.$$

$$\text{II. 1. } n \in [3/2, \infty).$$

$$2. m = -3; n = 27 \text{ și } p = -18. P(X) = 0 \Rightarrow \text{rădăcinile polinomului sunt: } 1, 2, 3, -3. \quad 3. h = 21.$$

$$\text{III. 1. } d = l\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 10; A_1 = 600 \text{ cm}^2; V = 1000 \text{ cm}^3.$$

$$2. \text{ a) } S_{\Delta VAB} = a^2, S_{\Delta VAD} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; S_{\Delta VBC} = a^2\sqrt{2}. \quad \text{b) } a^3.$$

TEST NR. 121

$$\text{I. 1. } 14, 14. \quad 2. \text{ Notez cu } x \text{ costul sacoului după prima reducere. } 400.000 \text{ costă sacoul după a doua reducere: } \frac{576000 - x}{x} = \frac{x - 400000}{400000} \Rightarrow \frac{576000}{x} = \frac{x}{400000} \Rightarrow x = 480000 \text{ lei. } 3. -\frac{47}{3}.$$

$$\text{II. 1. } x \in (-\infty, -281/13). \quad 2. a \in \mathbb{R} - \{-6, -4, 4\}. \quad 3. 4, 9.$$

$$\text{III. 1. Cele 3 distanțe sunt egale, deoarece intră în triunghiuri congruente: } 18 \text{ cm.}$$

$$2. \text{ a) } R = \frac{2\sqrt{39}}{3} \text{ cm; b) } V = \frac{14\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^3.$$

Obs. diagonala trapezului $2\sqrt{13}$ subîntinde arcul de 120° , este latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază R .

TEST NR. 122

$$\text{I. 3. a) } 2; \text{ b) } \sqrt{18 + 2\sqrt{17}} = \sqrt{(\sqrt{17} + 1)^2} = \sqrt{17} + 1. \quad \sqrt{18 - 2\sqrt{17}} = \sqrt{(\sqrt{17} - 1)^2} = \sqrt{17} - 1$$

$$\text{II. 2. a) } 0; \text{ b) } \frac{2x-3}{(x+1)(2x-3)} = \frac{1}{x+1}.$$

III. 1. a) $T3 \perp \Rightarrow d(M, AB) = MA = 12\sqrt{2}$; $d(M, BC) = MC = 20$.

b) $d(D, MBC) = DP = \frac{48}{5}$ ($DP \perp MC$).

2. a) $R = 4$; $G = 5$; $h = 3$. b) $\frac{100\pi}{9} \text{ cm}^2$; $\frac{304\pi}{27} \text{ cm}^3$.

TEST NR. 123

I. 1. 6, 12; 2. $-18/17$; 3. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} + \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}(5-3\sqrt{2})}{5-3\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3 + \sqrt{3}$.

II. 3. $x = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3}$.

III. 1. $d = 13$; $A_1 = 192 \text{ cm}^2$; $V = 144 \text{ cm}^3$.

2. a) $r = 5$; $A_1 = 520\pi \text{ cm}^2$; $V = 2600\pi \text{ cm}^3$. b) $h_{\text{con}} = 36$; $V_{\text{con}} = 2700\pi \text{ cm}^3$.

TEST NR. 124

1A, 2D, 3D, 4C, 5D, 6B, 7C, 8A, 9B, 10A.

TEST NR. 125

1B, 2A, 3D, 4D, 5C, 6D, 7A, 8D, 9C, 10B.

TEST NR. 126

I. 1. a) $\{0, 4, 6, 10\}$; b) $\{-5, -4, -2, -1, 0, 4, 6, 10\}$; c) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{2}\}$
 2. a) $\{7/2\}$; b) $\{-1\}$; c) $\{(8, -3)\}$; d) $[-1, 3]$. 3. a) $\{1, 7\}$; b) $\{0, 2, 4, 6\}$; c) $\{-5, 1, 2, 9\}$.

II. 1. 15 km/h, 45 km/h. 2. $3\frac{3}{7} \text{ cm}$. 3. $M_2, M_7 \in B$.

III. 1. $\sin \sphericalangle A = \sin 75^\circ = \frac{CE}{AC} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. $\cos \sphericalangle A = \cos 75^\circ = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. $BB' = x = \frac{41}{4} \text{ cm}$. 3. a) conform $T3 \perp$; b) $\sin \sphericalangle AOE = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos \sphericalangle EBO = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;

c) $AE = 5\sqrt{6}$; d) $S = 112 \text{ cm}$; $A_1 = 160 \text{ cm}^2$; $V = 128 \text{ cm}^3$.

Cuprins

Enunțuri 5

Soluții 128

**CLASELE
V-VIII**

Prezenta lucrare completează seria publicațiilor din Colecția "MATE - 2000" elaborate în conformitate cu programele școlare actuale și avizate de Comisia Națională de Matematică din Ministerul Educației Naționale cu nr. 36684/1996 pentru folosirea în clasă și pregătirea suplimentară a elevilor.

Editura *PARALELA 45*
str. Frații Golești, 29, 0300 - Pitești
tel./fax: 048 - 645846

I.S.B.N. 973 - 9291 - 42 - 2

Lei : 14 000

MATEMATICĂ